

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ПРОФИЛЬНЫХ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛАССОВ

Под редакцией А.А. Богданова

*Рекомендовано УМО “Ядерные физика и технологии”  
в качестве учебного пособия*

Москва 2011

УДК 53 (075)  
ББК 22.3 я7  
Л43

**Конспект лекций по физике для учащихся профильных физико-математических классов.** Учебное пособие. / А.А. Богданов, В.В. Грушин, Н.А. Добродеев, В.М. Емельянов, В.Р. Никитенко, Ю.В. Самоварщиков. / Под ред. А.А. Богданова. М.: НИЯУ МИФИ, 2011. – 104 с.

Предлагаемое учебное пособие основано на курсе лекций, читаемых авторами в течение многих лет для учащихся 11-х классов физико-математического профиля лицея при МИФИ. В лекциях рассмотрены механические и электромагнитные колебания и волны, оптика, фотоэффект, основы специальной теории относительности, основы атомной, ядерной физики и физики элементарных частиц. Лекции содержат около 30 задач, поясняющих и дополняющих теоретический материал.

Учебное пособие рекомендуется учащимся профильных физико-математических классов, учебных заведений ССО и СПО а также может быть использовано при подготовке к ЕГЭ по физике и к профильным олимпиадам.

Авторы выражают глубокую благодарность коллективу кафедры физики МИФИ за неоднократные обсуждения вопросов, изложенных в учебном пособии.

Пособие подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. *С.Е. Муравьев*

ISBN 978-7262-1406-1

© Национальный исследовательский  
ядерный университет «МИФИ», 2011

Редактор *Н.В. Шумакова*

Подписано в печать 15.12.2010. Формат 60х84 1/16  
Изд. № 1/4/118. Печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 250 экз. Заказ № 41.  
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».  
115409, Москва, Каширское шоссе, 31  
ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».  
144000, Московская область, г. Электросталь, ул. Красная, д. 42

## СОДЕРЖАНИЕ

### Лекция 1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1. Колебательные процессы.....	5
1.2. Кинематика и динамика свободных колебаний .....	5
1.3. Энергия гармонических колебаний .....	9
1.4. Затухающие колебания .....	10
1.5. Вынужденные колебания. Резонанс .....	11
1.6. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний .....	13
1.7. Сложение колебаний одного направления. Векторная диаграмма .....	15

### Лекция 2. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

2.1. Основные понятия.....	17
2.2. Уравнение волны.....	19
2.3. Интерференция волн .....	19
2.4. Стоячие волны .....	20
2.5. Принцип Гюйгенса–Френеля .....	22

### Лекция 3. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

3.1. Основные понятия .....	23
3.2. Закон электромагнитной индукции .....	24
3.3. ЭДС индукции в рамке, вращающейся в магнитном поле .....	25
3.4. Генератор переменного тока .....	25
3.5. Действующие значения силы тока и напряжения .....	27
3.6. $R$ , $L$ , $C$ в цепи переменного тока .....	29
3.7. Мощность в цепи переменного тока.....	31
3.8. Трансформаторы .....	34
3.9. Свободные колебания в электрическом контуре .....	35
3.10. Электромагнитное поле .....	38
3.11. Электромагнитные волны.....	39
3.12. Некоторые свойства электромагнитных волн .....	40
3.13. Шкала электромагнитных волн.....	41

### Лекция 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

4.1. Введение .....	42
4.2. Закон отражения.....	43
4.3. Закон преломления света .....	44
4.4. Полное отражение.....	45
4.5. Плоское зеркало.....	46
4.6. Сферические зеркала .....	47
4.7. Построение изображений, создаваемых параксиальными лучами в сферическом зеркале.....	48
4.8. Формула сферического зеркала.....	49
4.9. Линзы.....	50

4.10. Построение изображений, создаваемых параксиальными лучами, в линзах.....	51
4.11. Формула линзы.....	52
4.12. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы .....	53
Лекция 5. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ и ДИФРАКЦИЯ СВЕТА	
5.1. Введение .....	54
5.2. Способы наблюдения интерференции света.....	58
5.3. Дифракция света .....	60
5.4. Дифракционная решетка .....	62
Лекция 6. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ	
6.1. Излучение нагретого тела.....	64
6.2. Фотоэффект .....	66
6.3. Основные принципы квантовой механики .....	70
Лекция 7. ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ	
7.1. Экспериментальные основы специальной теории относительности .....	73
7.2. Принципы специальной теории относительности.....	74
7.3. Пространство и время в СТО .....	77
7.4. Преобразования Лоренца. Релятивистский закон преобразования скорости .....	81
7.5. Эффект Доплера .....	83
7.6. Энергия, импульс и масса в релятивистской динамике .....	85
7.7. Основное уравнение релятивистской динамики .....	86
Лекция 8. ОСНОВЫ АТОМНОЙ ФИЗИКИ	
8.1. Опыты Резерфорда .....	88
8.2. Закономерности атомных спектров.....	91
8.3. Постулаты Бора .....	92
8.4. Водородоподобный атом .....	92
Лекция 9. ОСНОВЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ	
9.1. Состав атомного ядра .....	95
9.2. Ядерные силы.....	97
9.3. Энергия связи атомных ядер.....	97
9.4. Радиоактивность .....	98
9.5. Закон радиоактивного распада .....	99
9.6. Ядерные реакции.....	100
9.7. Элементарные частицы .....	102
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	104

# Лекция 1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

## 1.1. Колебательные процессы

**Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости.** Таким свойством повторяемости обладают, например, качания маятника часов, колебания струны или ножек камертона, напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т.п.

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания механические, электромагнитные, электромеханические и т.д. Колебательное движение характеризуется периодом колебания  $T$ , частотой колебания  $\nu$ .

**Период колебания  $T$  – наименьший промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех величин, характеризующих колебательное движение, т.е. время, за которое совершается полное колебание.**

**Частота колебаний  $\nu$  – число полных колебаний за единицу времени.**

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают свободные (или собственные) колебания и вынужденные колебания.

**Свободными называют такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения устойчивого равновесия.**

**Вынужденными называют такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней силы.**

## 1.2. Кинематика и динамика свободных колебаний

Простейшим примером свободных колебаний по характеру описания являются **гармонические колебания. Это такие колебания, при которых колеблющиеся величины изменяются со временем по закону синуса или косинуса:**

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ или } x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1.1)$$

где  $\omega_0 = 2\pi\nu$  – круговая частота,  $A$  – амплитуда колебаний – максимальное отклонение от положения равновесия.

**Аргумент синуса (или косинуса) называется фазой колебаний:**

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0,$$

где  $\varphi_0$  – начальная фаза, т.е. значение фазы в начальный момент времени  $t = 0$ .

Вычислим скорость и ускорение точки, совершающей гармоническое колебание. Так как

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

то

$$v_x = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -\frac{2\pi A}{T} \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.2)$$

Так как проекция ускорения  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$ , то

$$a_x(t) = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x = -\frac{4\pi^2}{T^2} x(t). \quad (1.3)$$

Амплитуда скорости равна  $v_m = A\omega_0$ , амплитуда ускорения  $a_m = A\omega_0^2$ . Знак " – " в (1.3) означает, что ускорение направлено в сторону, противоположную смещению. Изменение  $x$ ,  $v_x$ ,  $a_x$  с течением времени графически представлено на рис.1.1 (начальная фаза  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ ).

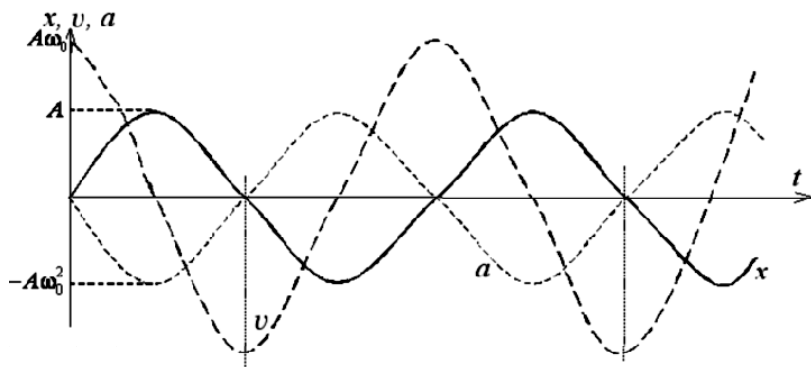


Рис. 1.1

Простейшим примером системы, где возникают свободные гармонические колебания, является движение тела под действием силы упругости пружины. Рассмотрим далее механическую систему, положение которой может быть задано с помощью одной величины, которую мы обозначим через  $x$ . Примером такой системы является тело массы  $m$ , прикрепленное к пружине жесткостью  $k$  (см. рис. 1.2), движущееся по горизонтальной поверхности без трения. Начало координат выбирается в точке, соответствующей положению конца нерастянутой пружины, поэтому  $x = (l - l_0)$  – растяжение пружины и в то же время смещение тела из положения равновесия.

При смещении тела из положения равновесия на него будет действовать упругая сила  $F_x$  со стороны пружины:

$$F_x = -kx. \quad (1.4)$$

*Если силы вида (1.4) имеют другую природу (т.е. не являются силами упругости), то их называют квазиупругими. В этом случае  $k$  – коэффициент квазиупругой силы.*

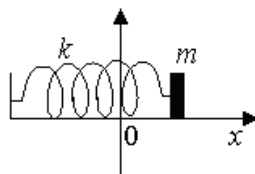


Рис. 1.2

Напишем второй закон Ньютона в проекции на ось  $x$  для системы, изображенной на рис. 1.2

$$ma_x = F_x; \quad F_x = -kx; \quad ma_x = -kx.$$

Учитывая, что ускорение является второй производной от перемещения, получим дифференциальное уравнение, описывающее колебания данной системы:

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (1.5)$$

Решение данного уравнения может быть записано в виде

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0\right) + x_0,$$

где

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0. \quad (1.6)$$

Амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi_0$  определяются начальными условиями.

**Частота свободных колебаний системы называется собственной частотой системы.**

Таким образом, частота (1.6) – собственная частота пружинного маятника. Колебательную систему, изображенную на рис. 1.2, называют **пружинным маятником**.

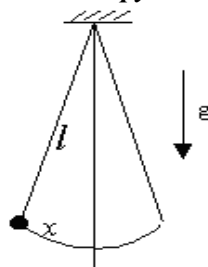


Рис. 1.3

Другим примером колебательной системы может служить математический маятник (рис. 1.3).

**Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из легкой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.**

Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити. В такой системе при малых углах отклонения нити происходят гармонические колебания. В этом случае собственная частота  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , период

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . Здесь  $g$  – ускорение свободного падения и  $l$  – длина нити.

Приравнявая частоту математического маятника  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  и частоту системы, колеблющейся под действием квазиупругой силы (1.6), находим коэффициент квазиупругой силы математического маятника  $k = \frac{mg}{l}$ .

Так как сила натяжения  $N$  нити в равновесии равна  $mg$ , то выражение для  $k$  можно записать по-другому:  $k = \frac{N}{l}$ . Это выражение может быть применено для расчета частоты колебаний шарика на нити, подвешенного в движущейся с ускорением системе. (Надо при этом помнить, что  $N$  – это сила натяжения нити маятника не колеблющегося, а находящегося в положении равновесия.)

**Пример 1.1.** Рассмотрим математический маятник, подвешенный на платформе, двигающейся в горизонтальном направлении с ускорением  $a$ , и найдем период колебаний маятника.



Второй закон Ньютона для положения, показанного на рис. 1.4, в проекциях на оси  $x$  и  $y$  имеет вид

$$ma = N \sin \alpha, \quad mg = N \cos \alpha,$$

$$N = m\sqrt{a^2 + g^2}, \quad k = \frac{N}{l} = \frac{m\sqrt{a^2 + g^2}}{l},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}.$$

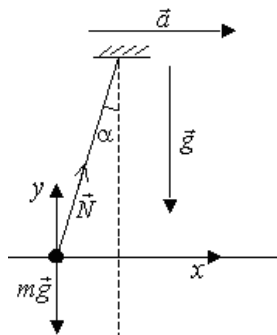


Рис. 1.4

### 1.3. Энергия гармонических колебаний

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия  $W$  состоит только из потенциальной, которая достигает своего максимального значения  $U_{\max}$ :

$$W = U_{\max} = \frac{kA^2}{2}. \quad (1.7)$$

При прохождении же системы через положение равновесия (считаем, что в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю) полная энергия состоит лишь из кинетической энергии, которая в эти моменты достигает своего наибольшего значения  $K_{\max}$ :

$$W = K_{\max} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (1.8)$$

Определим, как изменяются со временем кинетическая и потенциальная энергии гармонических колебаний. Кинетическая энергия в произвольный момент времени равна

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.9)$$

Потенциальная энергия выражается формулой

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (1.10)$$

Сложив вместе кинетическую и потенциальную энергии, получим формулу для полной энергии:

$$E = U + K = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \text{const}. \quad (1.11)$$

Таким образом, полная энергия гармонических колебаний сохраняется. Отметим, что выражения (1.9) и (1.10) соответствуют гармоническим колебаниям с частотой  $2\omega_0$  и амплитудой

$$\frac{1}{4}mA^2\omega_0^2 = \frac{kA^2}{4}.$$

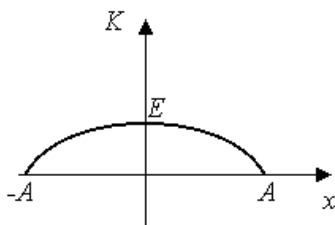


Рис. 1.5

**Пример 1.2.** Построим график зависимости кинетической энергии от смещения при гармонических колебаниях пружинного маятника.

Поскольку полная энергия сохраняется, то  $K = E - \frac{kx^2}{2}$  и график будет иметь вид, показанный на рис. 1.5.

#### 1.4. Затухающие колебания

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению (диссипации) энергии системы. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, колебания будут затухать. В ряде случаев можно считать, что сила сопротивления пропорциональна величине скорости  $F_{\text{спр}} = -r\dot{x}$ , где  $r$  – **постоянная, называемая коэффициентом сопротивления**. Знак “–” обусловлен тем, что сила сопротивления и скорость имеют противоположные направления. Уравнение второго закона Ньютона для системы, изображенной на рис. 1.6, при наличии сил сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \quad (1.12)$$

где  $x$  – смещение груза из положения равновесия. При небольшой силе трения полученное дифференциальное уравнение имеет следующее решение:

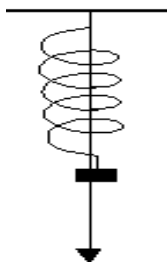


Рис. 1.6

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.13)$$

где  $\beta = \frac{r}{2m}$  – коэффициент затухания,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота возникающих колебаний.

Как следует из выражения (1.13), коэффициент затухания  $\beta$  есть величина, обратная времени, в течение которого начальная амплитуда затухает в  $e$  раз. Требование небольшой силы трения означает,

что должно выполняться условие  $\omega_0^2 > \beta^2$  т.е.  $\frac{k}{m} > \frac{r^2}{4m^2}$  или

$r^2 < 4mk$ . Графически зависимость смещения системы от времени при затухающих колебаниях представлена на рис. 1.7. Если коэффициент затухания большой ( $\beta > \omega_0$ , например, очень вязкая среда) то колебания возникнуть не могут. Такое движение называется аperiodическим и не описывается выражением (1.13).

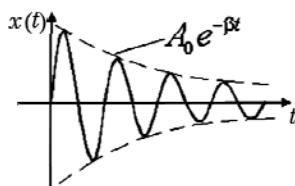


Рис. 1.7

## 1.5. Вынужденные колебания. Резонанс

Рассмотрим колебательную систему, подвергающуюся действию внешней силы, изменяющейся со временем по гармоническому закону:  $F = F_0 \cos \omega' t$ . В этом случае на основании второго закона Ньютона можно записать:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega' t. \quad (1.14)$$

Сначала энергия и амплитуда вынужденных колебаний возрастают, идет установление колебаний. В тот момент, когда работа вынуждающей силы совпадает с работой силы трения, возникает режим незатухающих колебаний. Вынужденные колебания в установившемся режиме представляют собой гармонические колебания с частотой вынуждающей силы. Получим амплитуду вынужденных колебаний в установившемся состоянии. Для этого преобразуем соотношение (1.14) следующим образом:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\beta = \frac{r}{m}, \quad f_0 = \frac{F_0}{m}, \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega' t. \quad (1.15)$$

Решение уравнения, описывающего вынужденные установившиеся колебания, будем искать в виде

$$x(t) = b \cos(\omega' t - \theta), \quad (1.16)$$

где  $\omega'$  – частота вынуждающей силы,  $b$  – амплитуда установившихся колебаний,  $\theta$  – сдвиг фазы. Амплитуду и сдвиг фазы определяем с помощью векторной диаграммы. С учетом выражения (1.16) определим слагаемые в левой части (1.15) следующим образом:

$$\omega_0^2 x = \omega_0^2 b \cos(\omega' t - \theta),$$

$$2\beta \dot{x} = -2\beta b \omega' \sin(\omega' t - \theta) = 2\beta b \omega' \cos(\omega' t - \theta + \frac{\pi}{2}), \quad (1.17)$$

$$\ddot{x} = -\omega'^2 b \cos(\omega' t - \theta) = \omega'^2 b \cos(\omega' t - \theta + \pi).$$

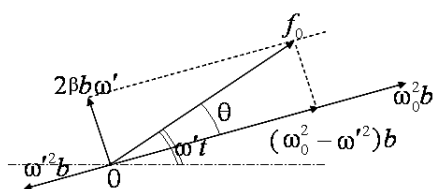


Рис. 1.8

Каждое из слагаемых в (1.17) изобразим в виде вектора с соответствующей амплитудой и углом поворота относительно оси, определяемым аргументом косинуса. В результате геометрического сложения этих век-

торов, получаем итоговый вектор  $f_0 \cos \omega' t$  (рис 1.8). Применяя теорему Пифагора, получим

$$f_0^2 = (\omega_0^2 - \omega'^2)^2 b^2 + 4\beta \omega'^2 b^2,$$

откуда находим амплитуду установившихся вынужденных колебаний  $b$ :

$$b = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta \omega'^2}}. \quad (1.18)$$

При некоторой частоте вынуждающей силы, определенной для каждой системы, амплитуда колебаний достигает максимального значения. Колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие вынуждающей силы при этой частоте.

**Явление резкого возрастания амплитуды колебаний называется резонансом.** Резонанс наступает при совпадении собственной частоты колебаний системы с частотой вынуждающей силы.

**Соответствующая резонансу частота вынуждающей силы называется резонансной частотой.**

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы показана графически на рис. 1.9. Отдельные кривые на графике соответствуют различным значениям коэффициента затухания. Очевидно, что резонанс тем меньше выражен, чем больше коэффициент затухания.

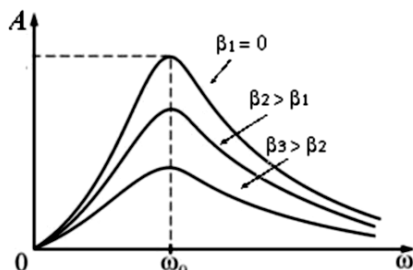


Рис. 1.9

## 1.6. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим движение точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, частоты которых  $\omega_1$  и  $\omega_2$  одинаковы ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ), амплитуды соответственно  $a$  и  $b$ .

Колебательный процесс в этом случае описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} x = a \sin \omega t; \\ y = b \sin(\omega t + \varphi), \end{cases} \quad (1.15)$$

где  $\varphi$  – сдвиг фаз слагаемых колебаний.

Для определения уравнения траектории движения точки из этой системы уравнений исключим время. Из первого уравнения

$\frac{x}{a} = \sin \omega t$ . Второе уравнение перепишем в виде:

$$y = b \sin(\omega t + \varphi) = b(\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi),$$

откуда

$$\cos \omega t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Подставив вместо  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  их значения, будем иметь уравнение движения

$$y = b \left( \frac{x}{a} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \varphi \right)$$

или

$$y = \frac{b}{a} \left( x \cos \varphi \pm \sqrt{a^2 - x^2} \sin \varphi \right).$$

Исследуем некоторые частные случаи.

1. Если при равенстве частот имеет место еще и равенство фаз, т.е.  $\varphi = 0$ , тогда уравнение траектории имеет вид  $y = \frac{b}{a}x$ ,  $|x| \leq a$ . Это уравнение прямой, проходящей через начало координат под углом  $\alpha$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$  (рис. 1.10). Смещение от начала координат определяется уравнением  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \omega t$ .

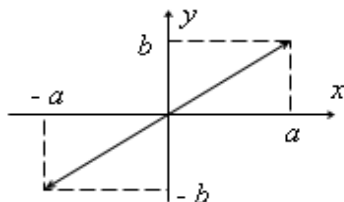


Рис. 1.10

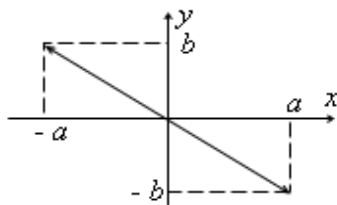


Рис. 1.11

2. При равенстве частот и разности фаз  $\varphi = \pm\pi$   $x = a \sin \omega t$ ,  $y = b \sin \omega t$ . Траектория имеет вид  $y = -\frac{b}{a}x$ ,  $|x| \leq a$  (рис. 1.11).

3. При равенстве частот и разности фаз  $\varphi = \pi/2$ , уравнение траектории имеет вид:  $|y| = b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ , откуда  $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$  или  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ , т.е. траектория является эллипсом с полуосями  $a$  и  $b$  (рис. 1.12).

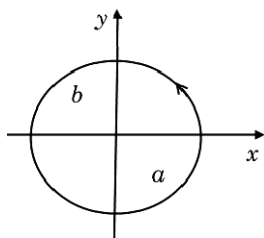


Рис. 1.12

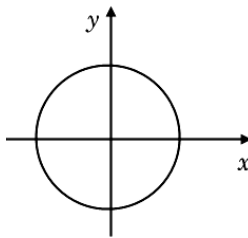


Рис. 1.13

При равенстве амплитуд слагаемых колебаний траектория представляет собой окружность (рис. 1.13).

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний, частоты которых кратны между собой (например  $\omega_1 : \omega_2 = 1:2, 2:3$  и т.д., т.е. равно  $m/n$ , где  $m$  и  $n$  – целые числа), колеблющееся тело описывает сложные кривые (называющиеся *фигурами Лиссажу*), форма которых определяется отношением частот складываемых колебаний, их амплитудой и разностью фаз между ними. На рис. 1.14. приведены примеры фигур Лиссажу для разных соотношений  $\omega_1:\omega_2$  и разностей фаз.

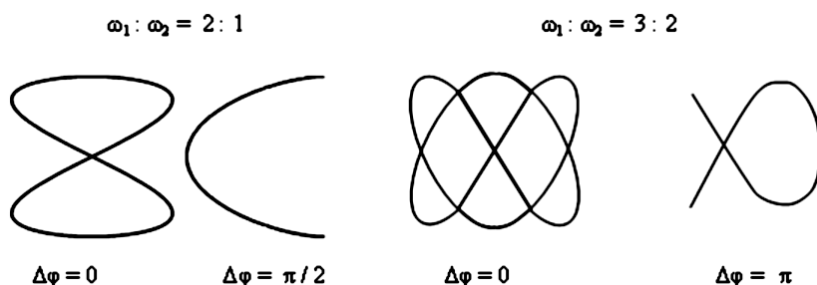


Рис. 1.14

## 1.7. Сложение колебаний одного направления.

### Векторная диаграмма

Сложение нескольких колебаний одинакового направления значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Полученная таким способом схема называется векторной диаграммой.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты. Смещение  $x$  колеблющегося тела будет суммой смещений  $x_1$  и  $x_2$ , которые записываются следующим образом:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (1.16)$$

Представим оба колебания с помощью векторов  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 1.15), по модулю соответствующих амплитудам и направленных под углами к оси  $OX$ , равными начальным фазам. Если считать, что

эти векторы вращаются с угловой скоростью  $\omega$  вокруг точки  $O$ , то проекции этих векторов на ось  $Ox$  описываются соотношением (1.16). Так как угловая скорость векторов  $A_1$  и  $A_2$  одинакова, то

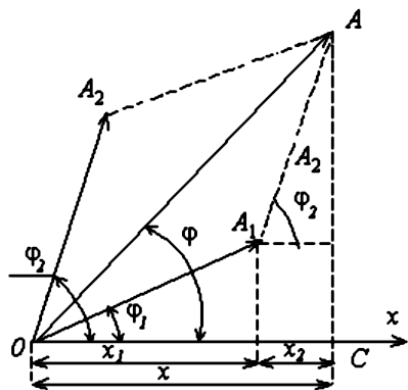


Рис. 1.15

вся картина их взаимного расположения не будет меняться по сравнению с начальной. Вектор  $A$  результирующего колебания можно строить по правилам сложения векторов для начального положения. Чтобы картина расположения векторов не изменилась, вектор  $A$  должен вращаться с той же угловой скоростью  $\omega$ , что и векторы  $A_1$  и  $A_2$ ,

так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой  $\omega$ . Амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi$ , как видно из рис.1.15, будут определяться соотношениями:

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

**Пример 1.3.** Пусть под воздействием одной волны поплавок колеблется в вертикальном направлении по закону  $y_1(t) = 3 \cos(5t + \varphi_1)$ , под воздействием другой  $y_2(t) = 4 \cos(5t + \varphi_2)$ . Определим частоту и амплитуду колебаний поплавка при набега-нии на него одновременно двух этих волн, если  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Результирующее смещение поплавка:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 3 \cos(5t + \varphi_1) + 4 \cos(5t + \varphi_2)$$

будет гармоническим колебанием с частотой  $\omega = 5$  рад/с и амплитудой  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 5$ .



## Лекция 2. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

### 2.1. Основные понятия

**Волнами называются колебания, распространяющиеся в пространстве.** Механические волны распространяются в среде (твёрдой, жидкой, газообразной). Образование волны схематически показано на рис. 2.1. Так как между частицами среды существует взаимодействие, то если какая-либо частица начинает колебаться, она увлекает за собой соседние частицы. На рисунке показаны положения частиц через четверть, половину, три четверти и один период колебаний.

**Частоту колебаний частиц среды  $\nu$  называют частотой волны, а расстояние, на которое распространится волна за период, называется длиной волны.**

**Скорость распространения колебаний  $v$  определяется следующим образом:**

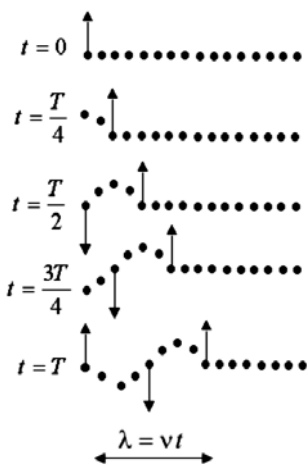
$$v = \lambda \cdot \nu = \frac{\lambda}{T}. \quad (2.1)$$

**Механические волны, при распространении которых деформация среды является упругой, называются упругими.**

Примером упругих волн являются звуковые волны – волны с частотами от 20 до 20000 Гц, воспринимаемые человеческим ухом.

В более широком смысле в физике звуковыми называют любые упругие волны в среде. Волны с частотой, меньшей 20 Гц, называются инфразвуком. Волны с частотой, большей 20000 Гц, называются ультразвуком.

**Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковых фазах, называется волновой поверхностью.** В частности, волновой поверхностью является **фронт волны** – геометрическое место точек до которых дошли колебания.



**Линии, перпендикулярные к волновым поверхностям, называются лучами.** Они указывают направление распространения волны.

Волновые поверхности бывают плоскими, сферическими и др. В соответствии с этим и волны называют **плоскими, сферическими** и т.п.

Одной из характеристик, описывающих распространение волн в пространстве, является **энергия, переносимая волной в единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярную лучам – интенсивность  $J$ :**

$$J = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t}.$$

Интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды колебаний:

$$J \sim A^2. \quad (2.2)$$

**Пример 2.1.** От точечного источника звука мощностью  $P$  распространяются равномерно по всем направлениям звуковые волны (такое излучение называют изотропным) (рис. 2.2). Найдем, как зависит амплитуда колебаний  $A$  от расстояния до источника  $r$ .

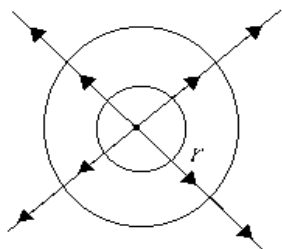


Рис. 2.2

Так как  $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ , то интенсивность

$$J = \frac{P}{4\pi r^2}, \quad A \sim \sqrt{J} \sim \frac{1}{r}, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Механические волны бывают двух типов.

**Поперечными волнами называются волны, в которых колебания частиц среды происходят перпендикулярно направлению распространения.**

**Продольными называются волны, в которых колебания происходят параллельно направлению распространения.**

Звуковые волны в воздухе – продольные. В жидкостях и газах могут существовать только продольные волны, в твердых телах – как продольные, так и поперечные.

## 2.2. Уравнение волны

Пусть в начале координат находится источник плоской волны, возбуждающий гармонические колебания в пространстве.

Обозначим через  $\xi$  – смещение частиц среды из равновесного положения, тогда в точке с координатой  $x = 0$  смещение будет описываться уравнением  $\xi(t) = A \sin \omega t$ . В точку с координатой  $x > 0$  колебания придут с запаздыванием на  $\tau = x/v$ . Следовательно, колебания в точке  $x$  будут отставать по фазе от колебаний в начале координат на величину  $\omega \tau$ . Таким образом, смещение в точке  $x$  будет описываться как

$$\xi(t, x) = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right). \quad (2.3)$$

Используя соотношения  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $v = \frac{\lambda}{T}$ , получим уравнение плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси абсцисс:

$$\xi(t, x) = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (2.4)$$

Уравнение плоской волны, распространяющейся в противоположном направлении:

$$\xi(t, x) = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right). \quad (2.5)$$

## 2.3. Интерференция волн

Что происходит, когда две (или более) волны перекрываются, т.е. попадают в одну область пространства? Если частица среды участвует в двух колебаниях (при наложении двух волн), то результирующее колебание по принципу суперпозиции определяется как сумма составляющих:

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t). \quad (2.6)$$

***Волны от когерентных источников (или когерентные волны) – это волны с одинаковой частотой и постоянной во времени разностью фаз.***

**Явление наложения волн от когерентных источников, приводящее к перераспределению интенсивности, называется интерференцией.**

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и частотами.

$$\left. \begin{aligned} \xi_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ \xi_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} \right\} A_1 = A_2 = A_0 ;$$

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) = A_0 [\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)] =$$

$$= 2A_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos \left( \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Амплитуда результирующего колебания

$$A = \left| 2A_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right| = 2A_0 \left| \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right|$$

постоянная, если  $\Delta\varphi$  не зависит от времени, т.е. если две волны когерентные.

При  $\Delta\varphi = 2\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )  $A = 2A_0$  – результирующая амплитуда максимальна.

При  $\Delta\varphi = (2n + 1)\pi$   $A = 0$  – результирующая амплитуда минимальна и колебаний в этой точке среды не происходит.

В случае, когда складываются волны с разными амплитудами, то в результате интерференции максимальная и минимальная амплитуды равны соответственно:  $A_{\max} = A_1 + A_2$ ,  $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ .

## 2.4. Стоячие волны

Стоячая волна возникает в результате интерференции двух волн, распространяющихся навстречу друг другу. Как уже отмечалось, уравнение плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$ , имеет вид

$$\xi_1(t, x) = A_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

в противоположном направлении

$$\xi_2(t, x) = A_0 \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right),$$

и такие волны в отличие от стоячих называют иногда бегущими. Складывая эти две волны, получим:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_1 + \xi_2 = A_0 \left[ \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right] = \\ &= 2A_0 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T}\end{aligned}$$

или

$$\xi(t, x) = A(x) \cos \omega t, \quad (2.7)$$

где

$$A(x) = 2A_0 \left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right|, \quad (2.8)$$

т.е. амплитуда колебаний частиц среды в разных точках будет различной, тогда как в бегущей плоской волне амплитуда колебаний будет везде одинаковой.

**В точках, координаты которых удовлетворяют уравнению**

$$A(x_i) = 2A_0 \left| \cos 2\pi \frac{x_i}{\lambda} \right| = 0, \quad (2.9)$$

**колебаний частиц среды не происходит вовсе. Такие точки называют узлами стоячей волны.**

**В точках, координаты которых удовлетворяют уравнению**

$$A(x_j) = 2A_0 \left| \cos 2\pi \frac{x_j}{\lambda} \right| = 2A_0, \quad (2.10)$$

**амплитуда колебаний максимальна. Такие точки называют пучностями.**

Рассмотрим возникновение стоячих волн в струне. Пусть по струне ударили в некоторой точке. В обоих направлениях побежит поперечная волна со скоростью  $v$ , зависящей от натяжения струны и ее массы.

В результате интерференции отраженных от закреплений волн образуется стоячая волна с узлами в точках закрепления (рис. 2.3). На длине  $l$  должно укладываться лишь целое число полуволн:

$$l = \frac{\lambda}{2} n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

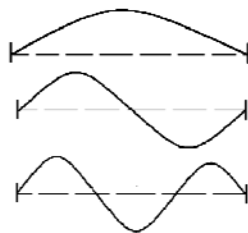


Рис. 2.3

Отсюда

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}.$$

Используя связь длины волны с частотой, получаем выражение для собственных частот струны:

$$v_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l} n \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (2.11)$$

При  $n = 1$  получается основной тон,  $n = 2, 3, \dots$  – обертоны. Набор этих частот и соответствующих им амплитуд определяет тембр звука.

## 2.5. Принцип Гюйгенса – Френеля

**Дифракция – явление огибания волнами препятствий. Дифракцию можно объяснить на основе принципа Гюйгенса–Френеля:**

а) **любую точку фронта волны, можно считать источником вторичных сферических волн** (рис. 2.4). Огибающая фронтов вторичных волн через небольшой промежуток времени даст новое положение волнового фронта;

б) **вторичные волны являются когерентными.**

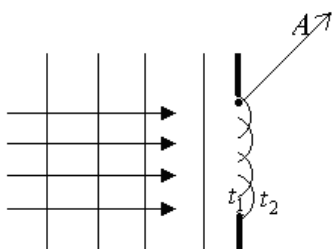


Рис. 2.4

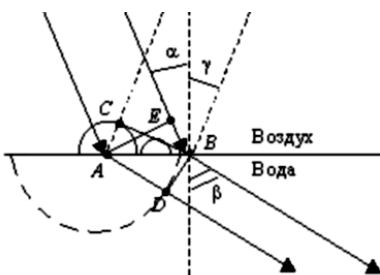


Рис. 2.5

С помощью принципа Гюйгенса – Френеля можно объяснить явления, возникающие на границе раздела двух сред. Пусть плоская звуковая волна падает из воздуха на поверхность воды. На границе раздела двух сред происходит отражение и преломление волн (рис. 2.5).

**Угол  $\alpha$  между падающим лучом и перпендикуляром к поверхности называется углом падения.**

Согласно принципу Гюйгенса–Френеля любая точка на границе раздела двух сред становится источником вторичных волн. Сначала начнет излучать вторичные волны точка  $A$ , а затем все остальные точки от  $A$  до  $B$ . От этих точек волны будут распространяться как в воздухе, так и в воде.

Вторичные волны в воздухе приводят к образованию отраженной волны, а в воде – преломленной. За время, в течение которого волновой фронт первичной волны достигнет точки  $B$ , вторичная волна от точки  $A$  пройдет в воздухе путь  $AC$ , а в воде –  $AD$ . Это произойдет за время прохождения фронтом волны отрезка  $EB$ :

$$\Delta t = \frac{EB}{v_1},$$

где  $v_1$  – скорость звука в воздухе. Тогда

$$AC = v_1 \Delta t = EB, \quad AD = v_2 \Delta t = EB \left( \frac{v_2}{v_1} \right), \quad (2.12)$$

где  $v_2$  – скорость звука в воде.

Прямая  $CB$  – волновой фронт отраженной волны, а прямая  $DB$  – волновой фронт преломленной волны. Поскольку  $AC = EB$ , то угол падения  $\alpha$  равен углу отражения  $\gamma$ .

Из рис. 2.5 видно, что

$$\angle CBA = \alpha, \text{ а } \angle DBA = \beta.$$

Тогда

$$AC = EB = AB \sin \alpha,$$

$$AD = AB \sin \beta.$$

Отсюда с учетом (2.12) получаем:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (2.14)$$

Это выражение называют законом преломления волн. Преломление волн является следствием различия скоростей распространения волн в различных средах.

## Лекция 3. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

### 3.1. Основные понятия

Как хорошо известно, зависимость силы тока  $i(t)$  и напряжения  $u(t)$ , используемых в быту и на производстве, описывается гармоническим законом:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \varphi_1), \\ u(t) &= U_m \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Стандартная частота тока в России  $\nu = 50$  Гц. Видно, что ток периодически изменяет свое направление, а напряжение – величину. *Такой ток и напряжение называются переменными*. Переменный ток можно рассматривать как вынужденные колебания зарядов в цепи.

Принцип получения переменного тока, лежащего в основе действия большинства электрогенераторов, базируется на явлении электромагнитной индукции.

### 3.2. Закон электромагнитной индукции

Закон электромагнитной индукции можно записать в виде:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.2)$$

где  $\Phi$  – поток вектора магнитной индукции,  $\varepsilon_i$  – ЭДС индукции, возникающей в замкнутом контуре. Знак “–” связан с направлением действия ЭДС. Наглядно поток вектора  $\vec{B}_0$  часто можно представить как величину, пропорциональную числу силовых линий магнитного поля, пронизывающих площадь, охватываемую контуром. Если  $B = B(t)$  и  $S = S(t)$ , то  $\Phi(t) = B(t)S(t)\cos\alpha(t)$  (для простоты предполагаем, что контур плоский), где  $\alpha$  – угол между нормалью к плоскости контура и вектором  $\vec{B}_0$ . Тогда

$$\varepsilon_i(t) = -\frac{dB(t)}{dt}S(t)\cos\alpha(t) - \frac{dS(t)}{dt}B(t)\cos\alpha(t) + \sin\alpha(t)B(t)S(t)\frac{d\alpha}{dt}.$$

Видно, что для возникновения в контуре ЭДС индукции необходимо выполнение хотя бы одного из трех условий:



- 1)  $\frac{dB}{dt} \neq 0$  – поле переменное;
- 2)  $\frac{dS}{dt} \neq 0$  – площадь контура меняется;
- 3)  $\frac{d\alpha}{dt} \neq 0$  – меняется ориентация контура в магнитном поле.

В промышленных электрогенераторах ЭДС индукции возникает за счет изменения ориентации контура.

### 3.3. ЭДС индукции в рамке, вращающейся в магнитном поле

Пусть рамка площади  $S$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг направления, перпендикулярного вектору  $\vec{B}_0$  (рис. 3.1).

Тогда

$$\Phi = BS \cos \alpha(t),$$

$$\varepsilon_i = BS \sin \alpha(t) \frac{d\alpha(t)}{dt},$$

но  $\alpha(t) = \omega t + \gamma$ ,  $\gamma$  – угол между нормалью к плоскости рамки и вектором  $\vec{B}_0$  в начальном положении рамки. Тогда

$$\varepsilon_i = BS\omega \sin(\omega t + \gamma) = \varepsilon_m \sin(\omega t + \gamma),$$

где амплитудное значение ЭДС:

$$\varepsilon_m = BS\omega. \quad (3.4)$$

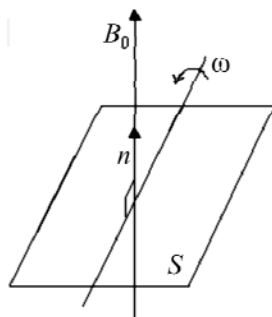


Рис. 3.1

### 3.4. Генератор переменного тока

Основными частями генераторов переменного тока являются:

- источник магнитного поля (магнит) – индуктор;
- обмотка, в которой возникает ЭДС индукции – якорь;
- контакты, снимающие ток с вращающейся части генератора.

**Вращающаяся часть генератора называется ротором, неподвижная часть генератора – статором.**

Для генерации тока стандартной частоты рамку необходимо вращать с частотой  $\nu = 50$  Гц. Если сделать ротор, у которого не одна пара полюсов, а несколько ( $n$ ), то частоту вращения ротора можно уменьшить до  $\nu' = \nu/n$ .

Хотя в технике применяется преимущественно переменный ток, во многих случаях бывает необходим и постоянный ток. Постоянный ток можно получить, либо преобразуя переменный ток с помощью выпрямительных устройств, либо используя **специальные генераторы постоянного тока**. Генераторы постоянного тока представляют собой обычные генераторы переменного тока (рис. 3.2), снабженные особым приспособлением – коллектором, дающим возможность превратить переменное напряжение на зажимах в постоянное. На рис. 3.3 показан способ получения тока одного направления. Использование более сложных схем с множеством рамок, позволяет достичь практически постоянного тока.

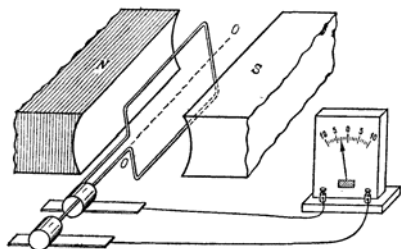


Рис. 3.2

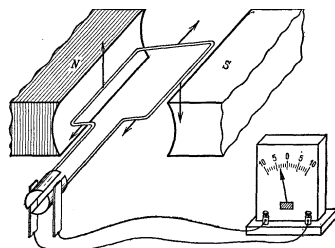


Рис. 3.3

Вращая генератор постоянного тока какой-нибудь внешней силой, мы затрачиваем определенную механическую мощность, а в сети получаем соответствующую электрическую мощность. Если же подключить к зажимам генератора какой-нибудь внешний источник тока и пропустить ток от этого источника через индуктор (электромагнит) и якорь генератора, то якорь придет во вращение. Теперь превращение энергии происходит в обратном направлении: мы затрачиваем определенную электрическую мощность, которую получаем от внешнего источника тока и превращаем ее в механическую мощность.

Пусть в цепи якоря идет ток  $I$ . Воспользуемся законом сохранения энергии: потребляемую мотором от сети мощность  $P = UI$  при-

равняем сумме механической мощности  $P_m$ , развиваемой мотором, и джоулева тепла, выделяющегося в якоре в единицу времени

$$IU = P_m + I^2 R. \quad (3.5)$$

Поскольку при вращении якоря в постоянном магнитном поле в его обмотке возникает ЭДС индукции, ток  $I$  определяется законом Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{U - \varepsilon}{R}. \quad (3.6)$$

Сравнивая предыдущие две формулы получаем, что

$$P_m = I\varepsilon. \quad (3.7)$$

### 3.5. Действующие значения силы тока и напряжения

В случае переменного тока закон Ома справедлив для мгновенных значений тока и напряжения (при небольших контурах и частотах переменного тока):

$$u(t) = i(t)R.$$

Для мгновенной мощности имеем

$$p(t) = i(t)u(t).$$

Энергетическое действие периодически меняющихся токов и напряжений принято характеризовать *действующими* значениями тока и напряжения  $I$  и  $U$ .

***Под действующими значениями силы тока (напряжения) в цепи переменного тока понимается такое значение силы тока (напряжения) в цепи постоянного тока, при котором за одно и то же время (равное периоду переменного тока) на активном сопротивлении выделяется такое же количество теплоты, что и в цепи переменного тока.***

***Активным сопротивлением называют ту часть сопротивления цепи переменного тока, в которой происходит необратимое превращение электрической энергии в тепловую.***

Согласно закону Джоуля–Ленца количество теплоты, выделяемое в цепи переменного тока за период, определяется выражением:

$$Q = \int_0^T i^2(t) R dt.$$

С учетом закона Ома аналогичное соотношение можно написать и для падения напряжения на сопротивлении  $R$ :

$$Q = \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt.$$

По определению

$$\begin{cases} \frac{U^2 T}{R} = \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt; \\ I^2 R T = \int_0^T i^2(t) R dt. \end{cases}$$

Величина

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \langle f \rangle$$

есть среднее значение функции  $f(t)$  за время  $T$ . С учетом этого получаем общее выражение для вычисления действующих значений силы тока и напряжения:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\langle u^2 \rangle}; \\ I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\langle i^2 \rangle}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Можно показать, что если переменный ток и напряжение изменяются по гармоническому закону, то:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \tag{3.14}$$

Действительно, для синусоидальной зависимости

$$\langle i^2 \rangle = \langle I_m^2 \sin^2 \omega t \rangle = I_m^2 (1 - \langle \cos 2\omega t \rangle) / 2 = I_m^2 / 2$$

(так как среднее от косинуса по периоду равно нулю), откуда и получаем (3.14).

Отметим, что когда говорят о напряжении в цепи 220 В (127 В), то имеют в виду действующее значение.

Если читатель не знаком с интегралами, то можно предложить следующий алгоритм нахождения действующих значений  $I$  и  $U$ :

строятся графики зависимости  $u^2(t)$  и  $i^2(t)$  находятся площади  $S(u^2)$ ,  $S(i^2)$  под графиками за период, затем используются формулы:

$$\frac{U^2}{R}T = \frac{S(u^2)}{R}, \quad I^2RT = S(i^2)R. \quad (3.15)$$

**Пример 3.1.** Найдем действующее значение  $U$  для тока, изменяющегося по закону (рис. 3.4):

$$S(u^2) = U_m^2 \tau \quad \frac{U^2}{R}T = \frac{S(u^2)}{R};$$

$$\frac{U^2T}{R} = \frac{U_m^2\tau}{R}; \quad U = U_m \sqrt{\frac{\tau}{T}}.$$

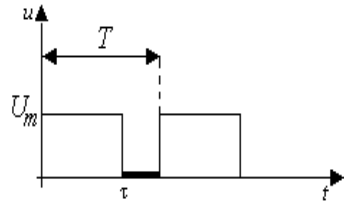


Рис. 3.4

**Пример 3.2.** Найдем действующее значение  $I$  для тока, изменяющегося по закону (рис. 3.5):

$$I = I_m \sqrt{\frac{t}{\tau}}, \quad 0 < t < \tau, \quad 0, \quad \tau < t < T.$$

График зависимости квадрата силы тока представлен на рис. 3.6. Исходя из графика

$$S(i^2) = \frac{I_m^2\tau}{2}, \quad I^2RT = \frac{I_m^2\tau}{2}R; \quad I = I_m \sqrt{\frac{\tau}{2T}}.$$

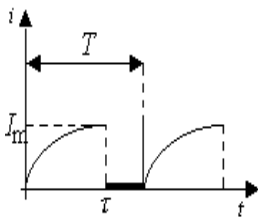


Рис. 3.5

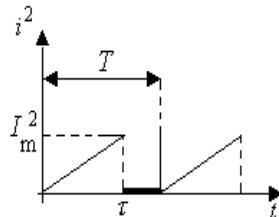


Рис. 3.6

### 3.6. $R$ , $L$ , $C$ в цепи переменного тока

Выясним, какие токи потекут через активное сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$ , если к ним приложить переменное напряжение  $U(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha)$  (рис. 3.7).

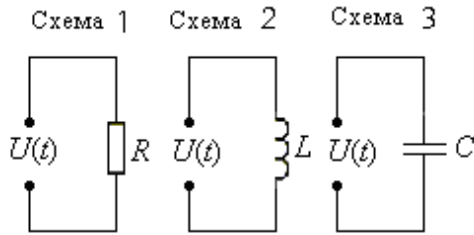


Рис. 3.7

1. Ток через активное сопротивление для схемы 1

$$i_R(t) = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t + \alpha) = I_{mR} \cos(\omega t + \alpha), \quad (3.16)$$

где  $I_{mR} = \frac{U_m}{R}$ .

2. В схеме 2 по второму правилу Кирхгофа:

$$u(t) - L \frac{di_L}{dt} = 0. \quad (3.17)$$

Если  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha)$ , то

$$i_L(t) = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \alpha),$$

что проверяется непосредственно подстановкой в (3.17). Чтобы сравнить фазы напряжения и тока, нужно выразить их через одну тригонометрическую функцию, например косинус. Тогда:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \alpha) = \frac{U_m}{\omega L} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= I_{mL} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где амплитудное значение тока  $I_{mL} = \frac{U_m}{\omega L}$ .

3. Для схемы 3 имеем  $u(t) = \frac{1}{C} q(t)$  или  $q(t) = Cu(t)$ . Так как

$i(t) = \frac{dq}{dt}$ , то  $i(t) = C \frac{du}{dt}$ . Таким образом,

$$i_C(t) = Cu'(t) = -\omega CU_m \sin(\omega t + \alpha) = \omega CU_m \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Окончательно получаем:

$$i_C(t) = I_{mC} \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.19)$$

где  $I_{mC} = U_m \omega C$  – амплитудное значение тока.

Как видно из приведенных формул:

1) токи  $i_R$ ,  $i_L$  и  $i_C$  изменяются по гармоническому закону с той же частотой, что и напряжение. Амплитудные значения токов:

$$I_{mR} = \frac{U_m}{R},$$

$R$  – активное сопротивление;

$$I_{mL} = \frac{U_m}{\omega L},$$

*величина  $X_L = \omega L$  называется индуктивным сопротивлением;*

$$I_{mC} = \omega C U_m,$$

*величина  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  называется емкостным сопротивлением;*

2) фаза  $i_R(t)$  совпадает с фазой  $u_R(t)$ ;

фаза  $i_L(t)$  меньше фазы  $u(t)$  на  $\pi/2$ ;

фаза  $i_C(t)$  больше фазы  $u(t)$  на  $\pi/2$ .

### 3.7. Мощность в цепи переменного тока

Выясним, какая средняя мощность выделяется за период при прохождении в цепи переменного тока.

Пусть в цепи приложено переменное напряжение  $u(t) = U_m \cos \omega t$ , и в ней течет ток  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $\varphi$  – сдвиг по фазе между напряжением и током. Мгновенное значение мощности, выделяемое в цепи:

$$\begin{aligned} P(t) &= i(t)u(t) = U_m I_m \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi + \frac{I_m U_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

При усреднении за период  $\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle = 0$ , т.е.

$$\langle P \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi.$$

Поскольку для напряжений и токов, изменяющихся по гармоническому закону  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ ,  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ , то для таких напряжений и токов

$$\langle P \rangle = IU \cos \varphi. \quad (3.20)$$

Тогда для схемы только с активным сопротивлением  $\langle P \rangle = I_{mR} U_m / 2$ , а для цепей только с индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$   $\langle P \rangle = 0$ , так как угол  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  и  $\cos \varphi = 0$ .

**Пример 3.3.** Найдем токи и напряжения в цепи, изображенной на рис. 3.8.

Пусть  $u(t) = U_m \cos \omega t$ . Очевидно, что в любой момент времени  $i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) \equiv i(t)$ . По 2-му правилу Кирхгофа

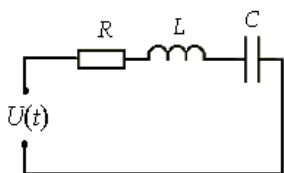


Рис. 3.8

$$u(t) - L \frac{di}{dt} = i(t)R + \frac{q(t)}{C}.$$

Но  $i(t) = \frac{dq}{dt}$ , тогда

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{LC} = \frac{u(t)}{L}.$$

Это дифференциальное уравнение для изменения заряда  $q$  от времени, оно с точностью до обозначений совпадает с дифференциальным уравнением вынужденных механических колебаний. Решая его или проводя аналогию с механическими колебаниями, можно получить зависимости от времени силы тока  $i(t)$  и напряжения  $u_R(t) = i(t)R$ ,  $u_C(t) = q(t)/C$ ,  $u_L(t) = L di/dt$ .

При этом приложенное напряжение в цепи:

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t).$$

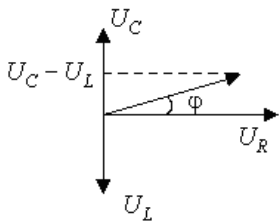


Рис. 3.9

Поскольку фазы  $u_R$ ,  $u_C$ ,  $u_L$  отличаются друг от друга, можно предложить графический метод сложения напряжений – диаграмму напряжений (рис. 3.9). Используя который получаем

$$U_m = \sqrt{(U_{mL} - U_{mC})^2 + U_{mR}^2},$$

где



$$U_{mL} = I_m \omega L, \quad U_{mC} = \frac{I_m}{\omega C}, \quad U_{mR} = I_m R.$$

Разность фаз  $\varphi$  между током и напряжением в цепи переменного тока определяется следующим образом

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R}, \quad (3.21)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2}}. \quad (3.22)$$

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2} \quad (3.23)$$

называется полным сопротивлением цепи.

**Пример 3.4.** К изображенной на рис. 3.10 цепи приложено переменное напряжение, меняющееся по закону  $U = U_m \sin \omega t$ .

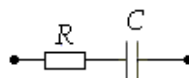


Рис. 3.10

Показать графически характер зависимости разности фаз между протекающим в цепи током и приложенным напряжением от частоты  $\omega$  приложенного напряжения.

Из соотношения (3.21) имеем  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega CR}$ . Тогда  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega CR}$ . При  $\omega \rightarrow 0$   $\varphi \rightarrow \pi/2$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$   $\varphi \rightarrow 0$ . Поэтому искомый характер зависимости  $\varphi(\omega)$  имеет вид, показанный на рис. 3.11.

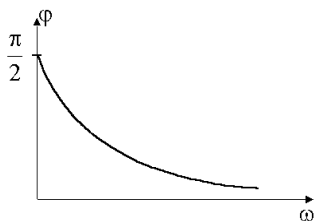


Рис. 3.11

**Пример 3.5.** Для колебательного контура, содержащего конденсатор емкостью  $C$  и катушку индуктивности  $L$ , построим график зависимости заряда на обкладках конденсатора  $q$  от тока в цепи  $i$ .

Заряд  $q = q_m \cos \omega_0 t$ , где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Тогда ток

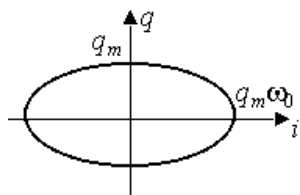


Рис. 3.12

$$i = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Исключая из выражений для заряда и тока время, получим:

$$\frac{q^2}{q_m^2} + \frac{i^2}{q_m^2 \omega_0^2} = 1.$$

График зависимости  $q(i)$  представляет собой эллипс (рис. 3.12).

### 3.8. Трансформаторы

При практическом использовании энергии электрического тока очень часто возникает необходимость изменять напряжение, даваемое каким-либо генератором. Для повышения (понижения) напряжения в цепи используются трансформаторы.

Простейший трансформатор имеет железный сердечник, на который намотаны две катушки (обмотки). Действие трансформатора основано на явлении электромагнитной индукции. В каждом витке обмоток индуцируется одна и та же ЭДС индукции  $e$ . Если в первичной обмотке  $n_1$  витков, а во вторичной  $n_2$ , то ЭДС в обмотках  $E_1 = en_1$  и  $E_2 = en_2$  и

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (3.24)$$

Если вторичная обмотка не нагружена (режим холостого хода трансформатора), то отношение напряжений на зажимах обмоток трансформатора с большой точностью равно отношению индуцируемых в них ЭДС:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{n_2}{n_1} = k, \quad (3.25)$$

где  $k = \frac{n_2}{n_1}$  – коэффициент трансформации. Если  $k > 1$ , то трансформатор называется повышающим, при  $k < 1$  – понижающим.

**Отношение мощности, потребляемой в цепи вторичной обмотки, к мощности, отбираемой от цепи первичной обмотки, называется КПД трансформатора.** Обычно  $i_2 u_2 \sim i_1 u_1$ .

Когда к вторичной обмотке подключается нагрузка, в ее цепи идет ток и выделяется мощность. Напряжение на концах вторичной обмотки уже не будет точно равно  $E_2$ , а будет несколько меньше, но если нагрузка не превышает той нормы на которую рассчитан трансформатор, то это уменьшение незначительной. Оно составляет 2 – 3 % от напряжения холостого хода.

### 3.9. Свободные колебания в электрическом контуре

До сих пор рассматривались вынужденные колебания зарядов, создаваемые генераторами электрического тока.

Теперь рассмотрим свободные электрические колебания в контуре, состоящем из конденсатора емкости  $C$  и катушки индуктивности  $L$  (рис. 3.13).

Для того чтобы в контуре возникли колебания зарядов, нужно зарядить конденсатор  $C$  до заряда  $q_0$ , а затем заряженный конденсатор соединить с катушкой  $L$  (рис. 3.14). Конденсатор начинает разряжаться, по контуру потечет ток  $i$ . Как он будет зависеть от времени?

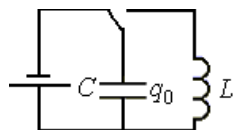


Рис. 3.13

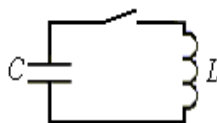


Рис. 3.14

$$i(t) = \frac{dq}{dt}.$$

Поскольку

$$\begin{cases} \frac{q(t)}{C} = -L \frac{di}{dt}; \\ \frac{dq}{dt} = i(t), \end{cases}$$

то  $q(t) = -LC \frac{di}{dt}$  и  $i(t) = -LC \frac{d^2i}{dt^2}$ . Таким образом, получаем:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} i(t) = 0. \quad (3.26)$$

Уравнение (3.26) – уравнение свободных гармонических колебаний с частотой  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Общим решением уравнения (3.26)

является  $i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_{\text{тока}})$ .

Аналогично для зависимости заряда на конденсаторе от времени получаем

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} q(t) = 0. \quad (3.27)$$

Это тоже уравнение свободных колебаний. Из него находим закон изменения заряда:

$$q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_{\text{заряда}}). \quad (3.28)$$

Период колебаний заряда (тока) в свободном колебательном контуре определяется формулой Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (3.29)$$

Видно, что период зависит только от параметров колебательно-го контура (емкости и индуктивности). Величина  $\omega_0$  называется **собственной частотой колебательного контура**.

Фазы и амплитуды токов и зарядов можно определить из начальных условий:

$$q(0) = q_0; \quad i(0) = 0;$$

$$q(0) = Q_m \cos \varphi_{\text{заряда}} = q_0;$$

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = -Q_m \omega_0 \sin \varphi_{\text{заряда}} = Q_m \omega_0 \cos \left( \varphi_{\text{заряда}} + \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

т.е.  $Q = q_0$ ,  $\varphi_{\text{заряда}} = 0$ .

Таким образом,

$$q(t) = q_0 \cos \omega_0 t. \quad (3.30)$$

Поскольку

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t = q_0 \omega_0 \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right),$$

то

$$I_m = q_0 \omega_0 \text{ и } \varphi_{\text{тока}} = \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$\begin{cases} q(t) = q_0 \cos \omega_0 t; \\ i(t) = q_0 \omega_0 \cos \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right). \end{cases} \quad (3.31)$$

Из соотношений (3.31) видно, что колебания тока опережают колебания заряда на  $\pi/2$ .

Рассмотрим процесс преобразования энергии в колебательном контуре. Электрическая энергия сосредоточена в конденсаторе:

$$E_{\text{эл}}(t) = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{1}{2}CU^2(t),$$

а магнитная энергия – в катушке  $E_{\text{маг}}(t) = \frac{Li^2(t)}{2}$ . Поскольку  $R = 0$  для контура, тепловые потери энергии отсутствуют. С учетом (3.31)

$$E_{\text{эл}}(t) = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t;$$

$$E_{\text{маг}}(t) = \frac{L}{2} I_m^2 \cos^2 \left( \omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{L}{2} I_m^2 \sin^2 \omega_0 t.$$

Тогда полная энергия в контуре

$$\begin{aligned} E_{\text{пол}}(t) &= E_{\text{эл}}(t) + E_{\text{маг}}(t) = \frac{q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = \\ &= \frac{q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{Lq_0^2 \omega_0^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{q_0^2}{2C} \end{aligned}$$

или

$$E_{\text{пол}} = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (3.32)$$

Графики  $E_{\text{эл}}(t)$ ,  $E_{\text{маг}}(t)$  и  $E_{\text{пол}}$  представлены на рис. 3.15. Энергия тоже изменяется по гармоническому закону, но с в два раза меньшем периодом, чем ток.

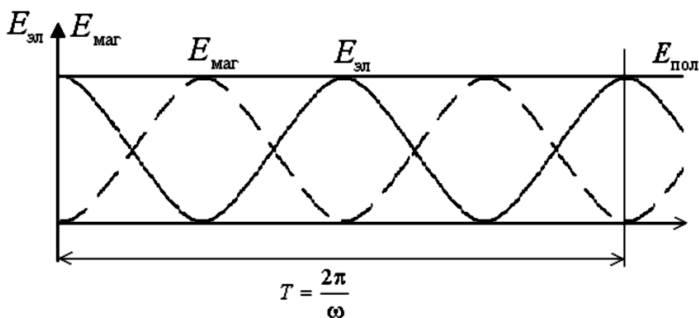


Рис. 3.15

**Пример 3.6.** Построим график зависимости электрической энергии конденсатора  $E_{\text{эл}}$  от тока в цепи. Поскольку сумма  $E_{\text{эл}}$  и  $E_{\text{маг}}$  есть величина постоянная:

$$E_{\text{эл}} + E_{\text{маг}} = E_0 = E_{\text{эл}} + \frac{Li^2}{2},$$

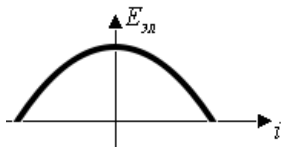


Рис. 3.16

то график зависимости  $E_{\text{эл}}(i)$  имеет вид, показанный на рис. 3.16.

Заметим, что этот график напоминает график зависимости кинетической энергии от координаты для гармонических колебаний пружинного маятника.

**Пример 3.7.** Рассмотрим резонанс в колебательном контуре. Как видно из соотношений (3.22) и (3.21), если частота  $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то реактивное сопротивление  $Z \rightarrow R$ , а ток сильно возрастает (если допустить, что  $R \rightarrow 0$ , то  $I \rightarrow \infty$ ). Это явление называется резонансом в колебательном контуре.

### 3.10. Электромагнитное поле

Еще Фарадей установил, что переменное магнитное поле порождает электрическое поле. Возникновение индукционного тока в проводящем контуре в случае изменения потока сквозь этот контур за счет изменения магнитного поля объясняется возникновением вихревого электрического поля, силовые линии которого замкнуты. Электрическое поле действует на свободные заряды в проводнике с силой  $\vec{F} = q\vec{E}$  и заставляет их двигаться.

А не порождает ли переменное электрическое поле, в свою очередь, магнитное?

Максвелл допустил, что если электрическое поле изменяется со временем, то оно порождает магнитное.

Линии магнитной индукции охватывают линии напряженности электрического поля, при этом при возрастании напряженности электрического поля  $\left(\frac{dE}{dt} > 0\right)$  направление вектора  $\vec{B}$  возникаю-

щего магнитного поля образует правый винт с направлением вектора  $\vec{E}$  (рис. 3.17). При убывании  $\left(\frac{dE}{dt} < 0\right)$  направление вектора  $\vec{B}$  образует с направлением вектора  $\vec{E}$  левый винт.

Таким образом, магнитное поле порождает переменное электрическое поле, которое, в свою очередь, порождает переменное магнитное и т.д.

**Изменяющиеся электрические и магнитные поля не существуют независимо друг от друга и образуют единое электромагнитное поле.**

**Пример 3.8.** Величина заряда на обкладках идеального плоского конденсатора возрастает. Укажем направление силы, действующей на электрон, движущейся за пределами конденсатора (рис. 3.18).

Действием электрического поля вне конденсатора можно пренебречь. В точке  $A$  возникает вихревое магнитное поле, вектор индукции которого, по правилу правого винта, направлен к наблюдателю и перпендикулярен плоскости листа. На электрон в точке  $A$  будет действовать сила Лоренца, направленная так, как указано на рис. 3.18.

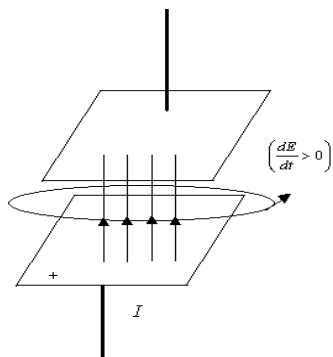


Рис. 3.17

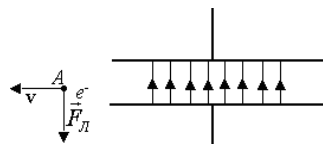


Рис. 3.18

### 3.11. Электромагнитные волны

Простейшей системой, создающей переменное электрическое поле, является электрический диполь с переменным дипольным моментом. Таким диполем является система, состоящая из неподвижного положительного заряда и совершающего около него колебания отрицательного заряда. Такая система имеет много аналогов в реальности – это, прежде всего, атомные и молекулярные системы.

Пусть электрический диполь приведен в быстрые колебания. Тогда электрическое поле вблизи от диполя начнет периодически

меняться. Период этих изменений будет равен периоду колебаний диполя. Далее переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле и т.д. В пространстве вдали от источника возникает система взаимно перпендикулярных, периодически изменяющихся электрических магнитных полей, мгновенная фотография которых представлена на рис. 3.19. Колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  при этом совпадают по фазе.

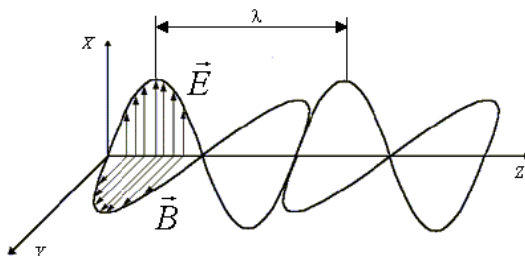


Рис. 3.19

**Вектор  $\vec{E}$  называется световым вектором.**

Образующееся при этом переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве, уходя от источника, – это и есть электромагнитная волна.

**Электромагнитная волна – это распространяющееся в пространстве переменное электромагнитное поле.**

### 3.12. Некоторые свойства электромагнитных волн

1. Электромагнитные волны распространяются в вакууме со скоростью

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

**называемой скоростью света** (точное  $c = 299792458 \text{ м/с}$ ).

2. Оказывается, что в электромагнитной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны, т.е. **электромагнитная волна – поперечная**.

3. **Излучение электромагнитных волн происходит только в системе заряженных частиц, движущихся с ускорением.**



Впервые экспериментально доказал существование электромагнитных волн Г. Герц в 1887 г. В своих опытах для излучения электромагнитных волн он использовал устройство, называемое **вибратором**. Оно состояло из двух металлических стержней с шарами на одном из концов. Между шарами оставлялся небольшой воздушный промежуток, и к шарам подводилось достаточно высокое напряжение, чтобы произошел разряд. Тогда в стержнях начиналось ускоренное движение зарядов и происходило излучение волн. Для регистрации волн использовался **резонатор – незамкнутый виток проволоки с шариками на концах, располагавшийся на расстоянии в несколько метров от вибратора**. При проскакивании искры в вибраторе она проскакивала также и между шариками резонатора.

### 3.13. Шкала электромагнитных волн

Электромагнитные излучения можно распределить по шкале электромагнитных волн (рис. 3.20).

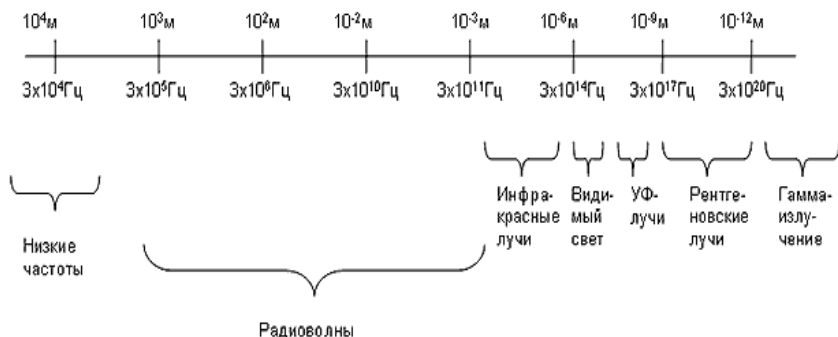


Рис. 3.20

## Лекция 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

### 4.1. Введение

**Геометрическая оптика** – раздел оптики, основанный на предположении о прямолинейности распространения световых лучей в однородной среде.

Это предположение оправдывается в широких областях практической применимости законов геометрической оптики.

Важной характеристикой прозрачной среды в геометрической оптике является *показатель преломления*.

**Абсолютным показателем преломления среды** называется отношение скорости света в вакууме к скорости света в данной среде:

$$n = \frac{c}{v}. \quad (4.1)$$

**Иногда используется понятие относительного показателя преломления двух сред** – это отношение их абсолютных показателей:

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.2)$$

Заметим, что абсолютный показатель преломления  $n \geq 1$ , а относительный  $n_{12}$  может быть как меньше, так и больше единицы. При переходе из одной среды в другую частота волн остается постоянной, а длина волны изменяется.

В 1660 г. П. Ферма сформулировал принцип, обобщающий законы геометрической оптики: **в пространстве между двумя точками свет распространяется по тому пути, вдоль которого время его прохождения минимально среди всех ближайших путей**. В оптической среде с показателем преломления  $n$  время прохождения светом некоторого расстояния в  $n$  раз больше, чем в вакууме. **Величина  $s = nl$  ( $l$  – геометрическая длина пути) называется оптической длиной пути**.

Эквивалентная формулировка принципа Ферма: **из одной точки в другую свет распространяется по пути с наименьшей (среди ближайших возможных) оптической длиной пути**.

Основными законами геометрической оптики являются законы отражения и преломления света.

## 4.2. Закон отражения света

Пусть на зеркальную поверхность из точки  $A$  падает световой луч. По какому пути он должен пройти, чтобы отразившись от зеркала, попасть в точку  $A'$ ?

Предположим, что свет из точки  $A$  в точку  $A'$  попадает по ломаной  $AOA'$ , отражаясь от поверхности в произвольной точке  $O$ . Предполагаем также, что ломаная лежит в плоскости перпендикулярной границе раздела двух сред (рис. 4.1).

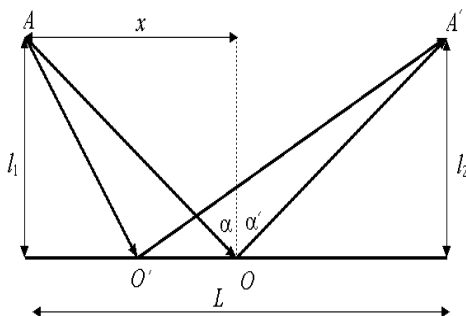


Рис. 4.1

Время прохождения света при этом равно

$$t = \frac{AO}{v} + \frac{OA'}{v} = \frac{\sqrt{l_1^2 + x^2}}{v} + \frac{\sqrt{l_2^2 + (L-x)^2}}{v}.$$

Согласно принципу Ферма, должно быть  $\frac{dt}{dx} = 0$ . Поэтому

$$\frac{dt}{dx} = t'_x = \frac{1}{v} \frac{x}{OA} - \frac{1}{v} \frac{L-x}{OA'} = \frac{1}{v} (\sin \alpha - \sin \alpha') = 0.$$

Отсюда

$$\sin \alpha = \sin \alpha',$$

и поскольку углы  $\alpha$  и  $\alpha'$  – острые, то

$$\alpha = \alpha', \quad (4.3)$$

т.е. **угол падения равен углу отражения**. Это первый закон отражения света.

**Второй закон отражения состоит в том, что лучи падающий и отраженный лежат в одной плоскости с перпендикуляром, проведенным из точки падения луча.**

Этот закон также следует из принципа Ферма. Для доказательства достаточно предположить противное.

### 4.3. Закон преломления света

Используя снова принцип Ферма, рассмотрим явление, происходящее на границе раздела двух сред. Пусть в среде 1 скорость света  $v_1$ , а в среде 2 –  $v_2$  (рис. 4.2). Время прохождения света из точки  $A_1$  в точку  $A_2$ :

$$t = \frac{\sqrt{l_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{l_2^2 + (L-x)^2}}{v_2}.$$

Предполагаем также, что ломаная  $A_1OA_2$  лежит в перпендикулярной к границе раздела двух сред плоскости. Выберем из всех возможных траекторий распространения света ту, которой соответствует минимальное время распространения света

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{x}{A_1O} - \frac{1}{v_2} \frac{L-x}{OA_2} = 0.$$

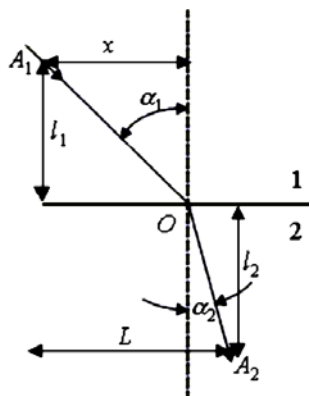


Рис. 4.2

Но

$$\sin \alpha_1 = \frac{x}{A_1O}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{L-x}{OA_2}.$$

Тогда

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} - \frac{\sin \alpha_2}{v_2} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c}{n_1} : \frac{c}{n_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

окончательно получаем

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}. \quad (4.4)$$

Из принципа Ферма следует также, что *преломленный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным через точку падения луча.*

**Пример 4.1.** В воздухе длина волны монохроматического света  $\lambda_1$ . При переходе в стекло длина волны света становится равной  $\lambda_2$ . Луч света падает на границу раздела под углом  $\alpha$ . Определим величину угла преломления.

Поскольку длины волн  $\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu}$ ,  $\lambda_2 = \frac{v_2}{\nu}$ , а частота волны не меняется при переходе из одной среды в другую, то  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2}$ . По закону преломления  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ , поэтому  $\sin \beta = \sin \alpha \frac{n_1}{n_2} = \sin \alpha \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ .

#### 4.4. Полное отражение

Среда с большим показателем преломления, чем другая среда, называется оптически более плотной. Если свет переходит из оптически менее плотной среды в оптически более плотную (например, из воздуха в воду), то всегда существуют как отраженный, так и преломленный лучи.

Если же свет переходит из оптически более плотной среды в менее плотную (например, из воды в воздух), то может возникнуть явление полного внутреннего отражения, когда не существует преломленного луча.

Предельный угол падения  $\alpha_{\text{пр}}$ , при котором преломленный луч распространяется вдоль границы раздела двух сред (рис. 4.3), находится из условия:

$$n_1 \sin \alpha_{\text{пр}} = n_2 \sin 90^\circ.$$

Если вторая среда – воздух ( $n_2 = 1$ ), то очевидно,

что  $\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n_1}$ . Для каждого прозрачного вещества существует

собственный предельный угол полного отражения. Так, для алмаза предельный угол составляет  $24^\circ 24'$  ( $n = 2,42$  – это самый большой показатель преломления для естественных минералов).

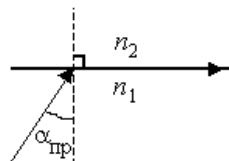


Рис. 4.3

## 4.5. Плоское зеркало

Построение изображения в плоском зеркале основано на использовании законов отражения света.

*Изображением светящейся точки в оптической системе отражающих и преломляющих поверхностей называется геометрическое место точек пересечения бесконечного количества лучей (или их продолжений), вышедших из системы и исходящих от этой точки.*

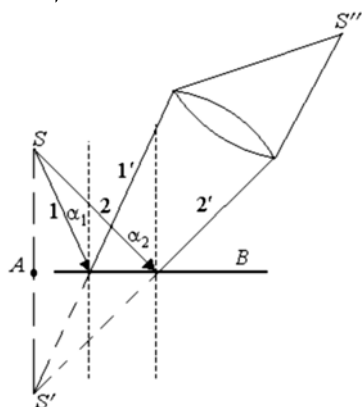


Рис. 4.4

Пусть имеется точечный источник света  $S$ , освещающий зеркало (рис. 4.4). Из всех лучей выберем два луча 1 и 2, которые падают на зеркало под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Продолжения отраженных лучей пересекаются в точке  $S'$  за зеркалом. Точка  $S'$  будет изображением точечного источника  $S$ .

*Изображение, получающееся при пересечении не самих лучей, а их продолжений, называется мнимым. В противном случае оно называется действительным.*

Почему мы видим мнимое изображение? Дело в том, что хрусталик глаза собирает расходящийся световой пучок и создает “свое” изображение на сетчатке  $S''$ .

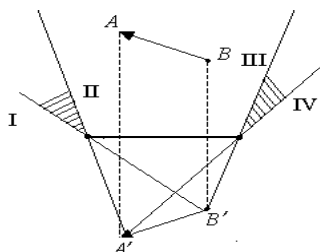


Рис. 4.5

Очевидно, что, пользуясь равенством треугольников  $ASO$  и  $AS'O$ , получаем  $S'A = SA$ , т.е. изображение  $S'$  и источник  $S$  расположены симметрично относительно плоскости зеркала.

Из практики известно, что не из любой точки можно увидеть изображение предмета в зеркале. Полностью изображение наблюдается только из области видения, ограниченного прямыми II и III на рис. 4.5. Есть еще две области I-II и III-IV, из которых видна только часть предмета.

*Это области частичного видения.* За пределами прямых I и IV изображения не видно.

## 4.6. Сферические зеркала

*Если взять в качестве отражающей поверхности симметричную часть внешней или внутренней поверхности зеркальной сферы, то получится сферическое зеркало.*

Различают два типа сферических зеркал: вогнутые (у них отражающее покрытие нанесено на внутреннюю поверхность сферы) и выпуклые (отражающее покрытие нанесено на внешнюю поверхность сферы).

*Линия, соединяющая центр сферической поверхности с вершиной зеркала, называется оптической осью сферического зеркала.*

*Фокусом  $F$  зеркала называется точка на оптической оси, через которую проходят после отражения от зеркала параксиальные лучи (или их продолжения), падавшие на зеркало параллельно оптической оси.*

Найдем положение фокуса вогнутого зеркала. Пусть на зеркало падает луч  $KM$  параллельно оптической оси  $OC$  (рис. 4.6). В точке падения восстановим перпендикуляр к зеркалу, им будет радиус  $OM$ . По закону отражения строим луч  $MF$ , который пересекает оптическую ось в точке  $F$ , являющуюся фокусом.

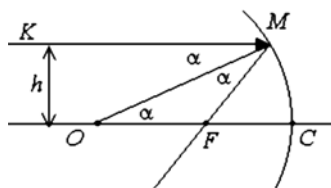


Рис. 4.6

Очевидно, что  $\angle COM = \angle KMO$ , но  $\angle KMO = \angle FMO$  по закону отражения, поэтому треугольник  $OFM$  – равнобедренный и

$$OF = \frac{OM}{2 \cos \alpha} = \frac{R}{2 \cos \alpha}.$$

Отсюда получаем расстояние  $CF$ :

$$CF = OC - OF = R - \frac{R}{2 \cos \alpha} = \frac{R}{2} \left( 2 - \frac{1}{\cos \alpha} \right).$$

Учитывая, что  $\sin \alpha = \frac{h}{R}$ , получим:

$$F = \frac{R}{2} \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}}} \right). \quad (4.5)$$

Видно, что в сферическом зеркале есть **сферическая аберрация**: расстояние  $CF$  оказывается различным для лучей, проходящих на разных расстояниях от оптической оси.

Для **параксиального пучка** ( $h \ll R$ ,  $\alpha \ll 1$ ) фокусное расстояние  $F = \frac{R}{2}$ . Оптическая сила зеркала, по определению:

$$\Phi = \frac{1}{F} = \frac{2}{R}. \quad (4.6)$$

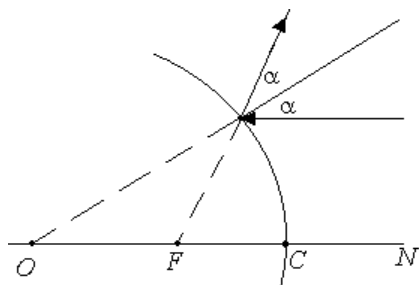


Рис. 4.7

Обратимся теперь к выпуклому зеркалу и построим ход отраженных лучей в нем (рис. 4.7). Как видно из этого рисунка, у выпуклого зеркала фокус мнимый, т.е.  $F = -\frac{R}{2}$ , поэтому для него оптическая сила – величина отрицательная.

#### 4.7. Построение изображений, создаваемых параксиальными лучами в сферическом зеркале

Для построения изображения следует выбрать любые два луча из трех стандартных:

- 1) луч, проходящий через оптический центр зеркала (центр сферы). После отражения от зеркала он опять пройдет через центр;
- 2) луч, падающий на зеркало параллельно оптической оси. После отражения он проходит через фокус зеркала;
- 3) луч, проходящий через фокус зеркала. После отражения он идет параллельно оптической оси.

В параксиальных лучах изображением отрезка является отрезок, при этом изображением отрезка, перпендикулярного оптической



оси является отрезок, также перпендикулярный оптической оси зеркала. Поэтому для построения изображения такого отрезка достаточно построить изображение точек начала и конца стрелки и провести перпендикуляры к оси.

Примеры построения изображений в вогнутом и выпуклом зеркалах приведены на рис. 4.8 – 4.10 (рис. 4.8 – изображение мнимое, увеличенное, прямое; рис. 4.9 – изображение действительное, уменьшенное, перевернутое; рис. 4.10 – изображение мнимое, увеличенное, прямое).

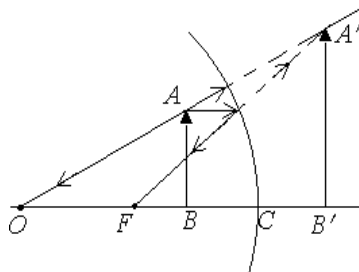


Рис. 4.8

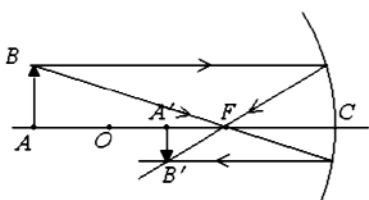


Рис. 4.9

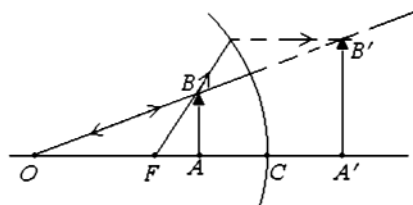


Рис. 4.10

## 4.8. Формула сферического зеркала

Если расстояние от предмета до вершины зеркала  $d$ , а расстояние от изображения до вершины зеркала  $d'$ , то при условии (4.6) выполняется соотношение (*формула сферического зеркала*):

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{F}. \quad (4.7)$$

При расчетах надо иметь в виду, что расстояние до действительного предмета и действительного изображения есть положительная величина, однако расстояние до мнимого предмета (предмета – образованного пересечениями мысленных продолжений сходящихся лучей, падающих на зеркало.) и мнимого изображения – отрицательная величина. Фокусное расстояние и оптическая сила вогнутого зеркала – величина положительная, выпуклого – отрицательная.

## 4.9. Линзы

*Линза – это прозрачное стеклянное тело, ограниченное двумя сферическими поверхностями. Одна из поверхностей линзы может быть плоской.*

*Прямая, на которой лежат центры обеих сферических поверхностей линзы, называется главной оптической осью.*

Будем далее рассматривать тонкие линзы, у которых толщина значительно меньше радиусов поверхностей. Положение тонкой линзы можно характеризовать одной плоскостью.

*Точка пересечения плоскости линзы с главной оптической осью называется оптическим центром линзы. Проходя через оптический центр линзы, луч не изменяет своего направления.*

*Любая другая прямая, проходящая через центр линзы, называется побочной оптической осью.*

*Плоскость, проходящая через центр тонкой линзы перпендикулярно главной оптической оси, называется главной плоскостью линзы.*

Если на линзу направить параксиальный пучок света параллельно главной оптической оси, то у выпуклой линзы пучок соберется в точке  $F$  на главной оптической оси, называемой *главным фокусом*. Такие линзы называются *собирающими* (рис. 4.11, а).

Если же такой пучок направить на вогнутую линзу, то лучи, прошедшие через линзу, будут отклоняться от главной оптической оси и в фокусе пересекутся их продолжения. Эта линза будет *рассеивающей*, а ее фокус будет *мнимым* (рис. 4.11, б).

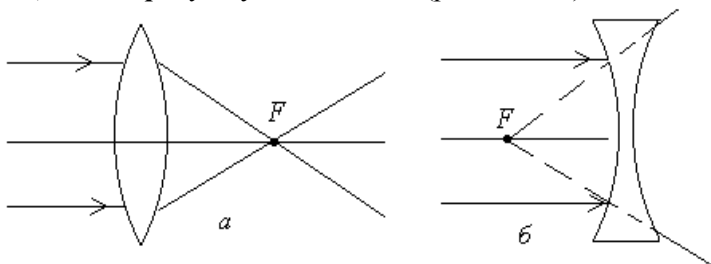


Рис. 4.11

Пучок света, направленный на собирающую линзу параллельно побочной оптической оси, собирается в *побочном фокусе*. Все по-

бочные фокусы лежат в **фокальной плоскости**, проходящей через главный фокус перпендикулярно главной оптической оси. У рассеивающей линзы можно построить мнимые фокальные плоскости.

#### 4.10. Построение изображений, создаваемых параксиальными лучами в линзах

Пусть предмет  $AB$  находится на расстоянии  $d$  от собирающей линзы. Чтобы построить изображение  $A'B'$ , достаточно использовать любые два из трех стандартных лучей:

- а) луч, параллельный главной оптической оси. После преломления он проходит через главный фокус;
- б) луч, совпадающий с побочной оптической осью. Этот луч проходит без преломления через центр линзы;
- в) луч, проходящий через главный фокус. После преломления он идет параллельно главной оптической оси.

Построения выполнены на рис. 4.12. Такие построения могут быть проведены, даже если высота предмета  $AB = h$  больше размера линзы (но при этом выполняется условие параксиальности лучей  $h \ll F$ ).

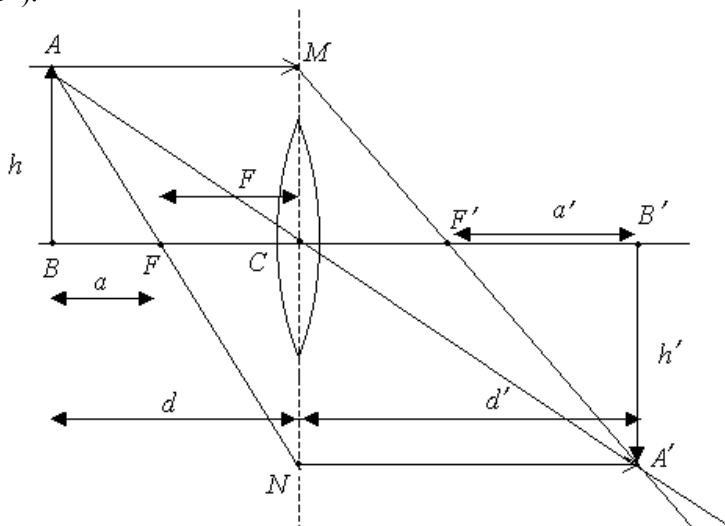


Рис. 4.12

Пример построения изображения в рассеивающей линзе приведен на рис. 4.13.

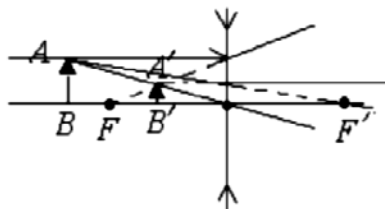


Рис. 4.13

### 4.11. Формула линзы

Расстояние от тонкой линзы до предмета  $d$ , расстояние до изображения  $f$  и фокусное расстояние  $F$  связаны между собой. Установим вид этой связи. Из подобия треугольников  $ABF$  и  $FCN$  имеем (см. рис. 4.12):

$$\frac{h'}{a'} = \frac{h}{F}; \quad \frac{h'}{F} = \frac{h}{a}.$$

Определим **поперечное увеличение** как  $\Gamma = \frac{h'}{h}$ . Тогда получаем

$$\Gamma = \frac{F}{a} = \frac{a'}{F}. \quad (4.8)$$

Отсюда следует **формула Ньютона**:

$$aa' = F^2. \quad (4.9)$$

Но расстояние  $d = a + F$ ,  $d' = f = a' + F$ , тогда из формулы Ньютона:  $(d - F)(f - F) = F^2$ . Отсюда получим **формулу линзы**:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \quad (4.10)$$

В этой формуле следует учитывать знаки входящих в нее величин. Фокусное расстояние собирающей линзы – положительное число, а рассеивающей линзы – отрицательное число. Расстояния от действительного предмета до линзы и от действительного изображения до линзы считаются положительными числами, расстояния от линзы до мнимого изображения и мнимого предмета – отрицательными числами.

**Пример 4.2.** Точечный источник света, двигаясь с постоянной по величине скоростью, описывает окружность в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F$ . Центр окружности расположен на главной оптической оси. Изображение источника наблюдается на экране, расположенном на расстоянии  $f$  от линзы. Каково соотношение скоростей изображения и источника?

Пусть расстояние от источника света до главной оптической оси  $h$ , а расстояние от изображения до главной оптической оси  $h'$ . Очевидно, что источник света и его изображение вращаются с одинаковыми угловыми скоростями  $\omega_1 = \omega_2$ . Отсюда  $\frac{v_1}{h'} = \frac{v}{h}$ , где  $v_1$  и  $v$  – линейные скорости изображения и источника. Поэтому  $\frac{v_1}{v} = \frac{h'}{h} = \Gamma$  – увеличение линзы. Поскольку  $\Gamma = \frac{f}{d}$ , то, используя формулу линзы, получаем  $\frac{v_1}{v} = \frac{f - F}{F}$ .

#### 4.12. Фокусное расстояние и оптическая сила линзы

Оптическая сила линзы в воздухе определяется как  $\Phi = \frac{1}{F}$ . Она, как и фокусное расстояние  $F$  линзы, зависит от радиусов поверхностей линзы, а также от показателя преломления вещества, из которого изготовлена линза. Для линзы с показателем преломления  $n$ , находящейся в воздухе:

$$\Phi = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (4.11)$$

где  $R_1, R_2$  – радиусы поверхностей линзы, причем радиус выпуклой поверхности считается положительным числом, вогнутой – отрицательным.

Получим выражение, аналогичное выражению (4.11), но для плоско-выпуклой линзы. Пусть на плоско-выпуклую линзу падает луч, параллельный главной оптической оси. После преломления в линзе луч пройдет через фокус (рис. 4.14).

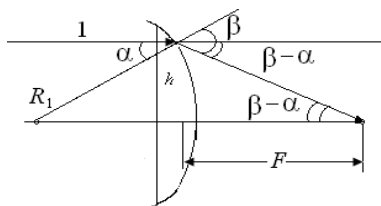


Рис. 4.14

Запишем закон преломления для границы стекло (линза) воздух:

$$n \sin \alpha = \sin \beta, \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}. \quad (4.12)$$

Так как луч 1 параксиальный, то углы  $\sin \alpha \approx \alpha$ , а  $\sin \beta \approx \beta$ ,  $\frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{1}{n}$ .

Используя малость углов, получим:

$$\frac{h}{F} = \beta - \alpha = \alpha(n-1), \quad \alpha = \frac{h}{R_1},$$

$$\frac{h}{F} = \frac{h}{R_1}(n-1), \quad \Phi = \frac{1}{F} = \frac{1}{R_1}(n-1).$$

Оптическая сила двух близко расположенных линз складывается, поэтому если рассмотреть двояковыпуклую линзу как две плосковыпуклые линзы, то легко получить формулу (4.11).

## Лекция 5. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

### 5.1. Введение

Пусть две волны одинаковой частоты, накладываясь друг на друга, возбуждают в некоторой точке колебания одинакового направления  $A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ ,  $A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ . Амплитуда результирующего колебания  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta$ ,  $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$  (см. § 1.7).

**Если разность фаз  $\delta$  возбуждаемых волнами колебаний остается постоянной во времени, то волны называются когерентными (при одинаковой частоте волн).**

В случае некогерентных волн разность фаз непрерывно хаотически изменяется, принимая с равной вероятностью любые значения, поэтому среднее по времени значение  $\cos \delta$  равно нулю. В этом случае среднее  $\langle A^2 \rangle = \langle A_1^2 \rangle + \langle A_2^2 \rangle$ . Поскольку интенсивность  $I \sim A^2$ , то получим для интенсивности волны  $I = I_1 + I_2$ .

В случае когерентных волн  $\cos \delta$  имеет некоторое постоянное (но свое для каждой точки пространства) значение, т.е.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (5.1)$$

В тех точках пространства, для которых  $\cos \delta > 0$  интенсивность  $I > I_1 + I_2$ , а для  $\cos \delta < 0$  получаем  $I < I_1 + I_2$ .

Таким образом, **при наложении когерентных волн происходит перераспределение интенсивности света в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других – минимумы интенсивности. Это явление называется интерференцией световых волн.**

Следует заметить, что уравнение (2.3), полученное для случая механических волн, справедливо для волн любой природы, в том числе и для световых (электромагнитных). Если в некоторой точке  $A$  складываются волны от источников, которые находятся в точках  $B$  и  $C$  (рис. 5.1), то разность фаз колебаний в точке  $A$  согласно уравнению (2.3) зависит от расстояний  $CA = x_2$  и  $BA = x_1$ :

$$\delta = \omega \left( \frac{x_2}{v_2} - \frac{x_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 x_2 - n_1 x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta.$$

Таким образом, результат интерференции зависит от оптической разности хода  $\Delta = n_2 x_2 - n_1 x_1$ , где  $n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления сред на пути волн. Если

$$\Delta = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.2)$$

то в точке будет наблюдаться максимум интенсивности; если

$$\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (5.3)$$

то минимум интенсивности.

**Пример 5.1.** Два когерентных точечных источника  $S_1$  и  $S_2$  испускают свет с длиной волны  $\lambda$ . Источники находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. На расстоянии  $l$  ( $l \gg d$ ) от источников расположен экран (рис. 5.1). Что будет наблюдаться в точке  $A$  на экране: интерференционный максимум или минимум?

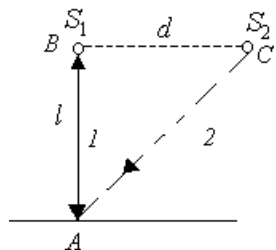


Рис. 5.1

Найдем оптическую разность хода  $\Delta$  двух лучей (1 и 2) от когерентных источников. Поскольку источники находятся в воздухе ( $n = 1$ ), величина  $\Delta$  будет совпадать с геометрической разностью хода:  $\Delta = S_2A = \sqrt{l^2 + d^2} - l$ . Поэтому в точке  $A$  будет максимум, если величина  $\Delta$  кратна четному числу полуволен:

$$\sqrt{l^2 + d^2} - l = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Если же

$$\sqrt{l^2 + d^2} - l = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

то будет минимум интенсивности.

Рассмотрим более подробно основные свойства интерференционной картины, создаваемой двумя источниками электромагнитных волн одинаковой интенсивности и наблюдаемой на плоском экране, расположенном на расстоянии  $l$  от плоскости расположения источников. В качестве таких источников могут быть, например, две бесконечно узкие, параллельные друг другу щели, расстояние между которыми  $d \ll l$ , прорезанные в плоском непрозрачном экране. Пусть источники электромагнитных волн располагаются в однородной среде с показателем преломления  $n$ .

Параметрами интерференционной картины являются положение её максимумов  $x_{\max}$  и минимумов  $x_{\min}$ , а также связанная с ними ширина полос интерференционной картины  $\Delta x$ .

Для расчёта этих величин надо найти разность фаз излучаемых источниками волн в точке наблюдения, расположенной на экране. Для расчёта  $\delta\varphi$  надо определить *оптическую разность хода*  $\Delta$  волн от первого и второго источников до точки наблюдения, поскольку

$$\delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda_0} = \frac{2\pi n(l_2 - l_1)}{\lambda_0}.$$

Расстояния  $l_1$  и  $l_2$  определяются следующими соотношениями:

$$l_1^2 = l^2 + (x - 0,5d)^2; \quad l_2^2 = l^2 + (x + 0,5d)^2.$$

где  $d$  – расстояние между щелями, а  $x$  – координата соответствующей точки на экране, отсчитанная от точки на экране удаленной на одинаковые расстояния от щелей (рис. 5.2).



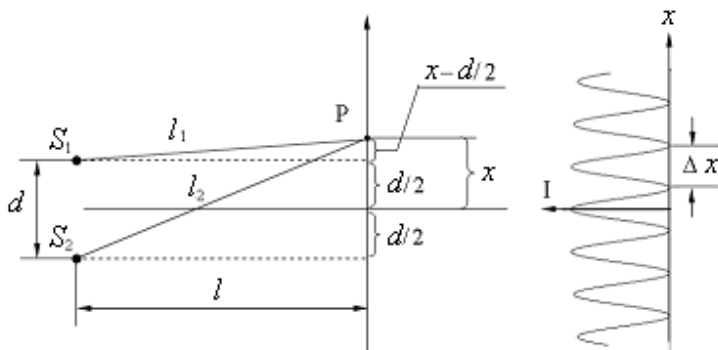


Рис. 5.2

Отсюда следует, что

$$l_2^2 - l_1^2 = (l_2 - l_1)(l_1 + l_2) \approx 2xd.$$

Принимая во внимание, что  $l_1 + l_2 \approx 2l$  при условии  $d \ll l$ , получаем:

$$(l_2 - l_1) \approx \frac{xd}{l}.$$

Использование этого соотношения приводит к следующему выражению для оптической разности хода волн  $\Delta$ :

$$\Delta \approx \frac{nx d}{l}.$$

Максимум интерференционной картины будет наблюдаться при условии синфазного сложения колебаний волн источников, которое происходит при  $\delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ . Исходя из связи между разностью фаз колебаний и оптической разностью хода можно заключить, что синфазное сложение колебаний происходит место при условии кратности оптической разности хода целому числу длин волны в среде. Найдём координату  $x_{\max}$ , определяющую положение  $m = \pm 1, 2, 3, \dots$ -го максимума интерференционной картины:

$$x_{\max}(m) = \frac{\pm m \lambda_0 l}{nd}. \quad (5.4)$$

Порядком интерференционного максимума называют его номер  $m$ , отсчитываемый от центрального ( $m = 0$ ), которому соответствует центр интерференционной картины, где складываются волны от

источников, проходящие одинаковый путь. Аналогичным образом можно найти *положения минимумов интерференционной картины* двух источников, определяемые координатами  $x_{\min}$ , если положить оптическую разность хода кратной нечётному числу полуволн:

$$x_{\min}(m) = \frac{(0.5 \pm m)\lambda_0 l}{nd} \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что в рассматриваемой интерференционной картине положения соседних интерференционных максимумов и минимумов находятся на одинаковом расстоянии друг от друга и не зависят от того, насколько эти максимумы удалены от центра интерференционной картины.

Это свойство максимумов и минимумов позволяет определить ширину интерференционной полосы.

*Ширина интерференционной полосы* определяется как расстояние между соседними интерференционными максимумами или минимумами, интерференционные порядки которых отличаются на единицу. Для рассматриваемой интерференционной картины двух источников волн одинаковой интенсивности ширина полосы  $\Delta x$  оказывается равной

$$\Delta x = \frac{\lambda_0 l}{nd}. \quad (5.6)$$

## 5.2. Способы наблюдения интерференции света

**1. Интерференция в тонких пленках (пластинках).** При падении световой волны на прозрачную пластинку (или пленку) происходит отражение от обеих поверхностей пластинки. В результате

возникают две световые волны, которые (если пленка достаточно тонкая) могут интерферировать.

Пусть на пластинку с показателем преломления  $n$  из воздуха падают два луча 1 и 2 (рис. 5.3). Первый луч отражается в точке С от пластинки, 2 луч преломится в точке А, затем частично отразится в

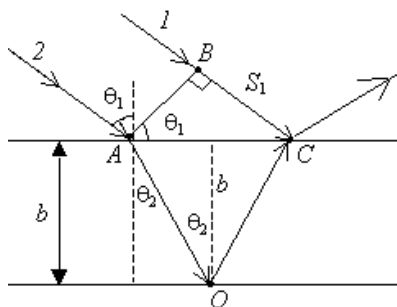


Рис. 5.3

точке  $O$ , попадет в точку  $C$ , при этом он наложится на отраженный луч  $I$ . Тогда  $\Delta = nS_2 - S_1$ , где  $S_1$  – длина отрезка  $BC$ , а  $S_2 = AO + OC$ .

Из рис. 5.3 видно, что

$$S_1 = 2btg\theta_2 \sin \theta_1, \quad S_2 = \frac{2b}{\cos \theta_2},$$

т.е.

$$\Delta = \frac{2bn}{\cos \theta_2} - 2btg\theta_2 \sin \theta_1 = 2b \frac{n^2 - n \sin \theta_2 \sin \theta_1}{n \cos \theta_2}.$$

По закону преломления  $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n$ , заменяя

$$n \cos \theta_2 = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \theta_2} = \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1},$$

получим окончательно:

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}. \quad (5.7)$$

Следует также учесть, что при отражении от оптически более плотной среды (в точке  $A$ ) происходит изменение фазы колебаний на величину  $\pi$ . Это можно учесть, добавляя в  $\Delta$  половину длины волны.

Таким образом, оптическая разность хода лучей  $1$  и  $2$  при интерференции в отраженном свете на пластинке толщиной  $b$ :

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1} + \frac{\lambda}{2}. \quad (5.8)$$

**2. Кольца Ньютона.** Кольца наблюдаются, например, при отражении света от соприкасающихся друг с другом толстой плоско-параллельной стеклянной пластинки и плоско-выпуклой линзы с большим радиусом кривизны. Роль тонкой пленки, от поверхности которой отражаются когерентные волны, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой.

При нормальном падении света светлые и темные интерференционные полосы имеют вид concentрических окружностей, при наклонном падении – эллипсов.

Найдем радиусы колец Ньютона, получающихся при падении света по нормали к пластинке. При этом  $\sin \theta_1 = 0$  и оптическая разность хода приближенно равна удвоенной толщине зазора.

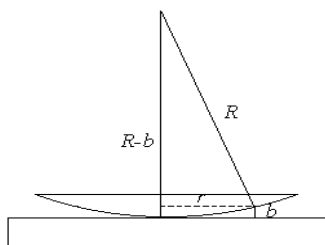


Рис. 5.4

Из рис. 5.4 видно, что

$$R^2 = (R - b)^2 + r^2 = R^2 - 2Rb + b^2 + r^2 \approx$$

$$\approx R^2 - 2Rb + r^2 \quad (b \ll r, \quad b \ll R).$$

Отсюда  $b = \frac{r^2}{2R}$ . Чтобы учесть возникающее при отражении от пластинки изменение фазы на  $\pi$ , надо к  $2b = \frac{r^2}{R}$

добавить  $\frac{\lambda}{2}$ . Поэтому оптическая разность хода равна

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda}{2}. \quad (5.9)$$

В точках, для которых  $\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}$ , возникают максимумы, а при

$\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$  – минимумы. Тогда радиусы колец Ньютона:

$$r = \sqrt{R\lambda(m - 1)/2}. \quad (5.10)$$

Если  $m$  четное – кольцо светлое, если  $m$  нечетное – кольцо темное.

### 5.3. Дифракция света

**Дифракцией называется совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики.**

Дифракция, в частности, приводит к огибанию световыми волнами препятствий и проникновению света в область геометрической тени.

Отметим, что между интерференцией и дифракцией нет существенного физического различия: оба явления заключаются в перераспределении светового потока в результате суперпозиции волн.

Проникновение волн в область геометрической тени можно объяснить с помощью уже известного нам принципа Гюйгенс–Френеля.

В 1802 г. Т. Юнг, открывший интерференцию света, поставил классический опыт по дифракции. В непрозрачной ширме он проколол два небольших отверстия, эти отверстия освещались световым пучком, прошедшим через другую ширму с малым отверстием. Возникающая в соответствии с принципом Гюйгенса сферическая волна в точке  $A$  возбуждала в точках  $B$  и  $C$  когерентные колебания. Вследствие дифракции от отверстий  $B$  и  $C$  выходили два световых конуса, которые частично перекрывались. В результате на экране возникали чередующиеся светлые и темные полосы (рис. 5.5). Закрывая одно из отверстий, Юнг обнаружил, что дифракционные полосы исчезали.

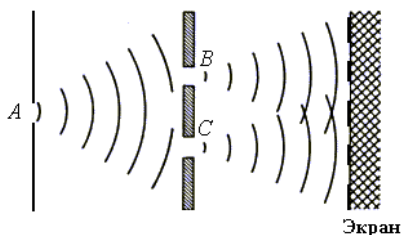


Рис. 5.5

На явлении дифракции основано устройство оптического прибора – дифракционной решетки.

Оценим, на какой угол в основном отклоняются световые лучи при дифракции. Рассмотрим преграду с длинной узкой щелью шириной  $a$ , на которую падает по нормали плоская волна. Среди всех лучей, относящихся к вторичным волнам, выберем те, которые попадают в точку на удалённом экране, направление на которую задано углом  $\varphi$ , (рис. 5.6). Поскольку точка находится далеко, лучи можно считать параллельными.

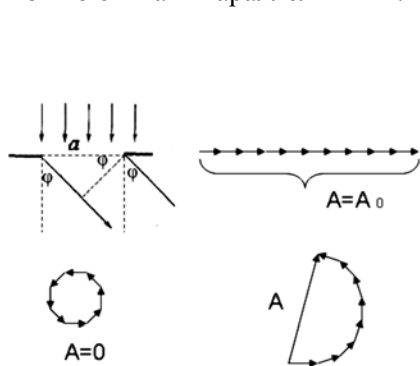


Рис. 5.6

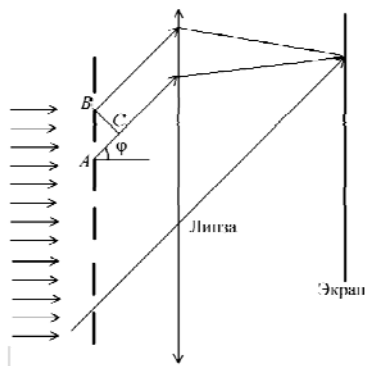


Рис. 5.7

Практически, не надо ставить экран далеко, достаточно поместить экран в фокальной плоскости собирающей линзы (рис. 5.7).

Действительно, все лучи, отклонившиеся на угол  $\varphi$ , после преломления соберутся в «нужной» точке. Таким образом, надо найти интенсивность плоской волны, которая вследствие дифракции отклонилась от нормали на угол  $\varphi$ .

Разделим мысленно всю плоскость щели на очень тонкие полоски одинаковой ширины и рассмотрим интерференцию колебаний, созданных в точке наблюдения всеми полосками. Поскольку ширина полосок одинакова, каждая из них создаёт в точке наблюдения колебание с одной и той же (малой) амплитудой. Одинакова и разность хода между соседними полосками. Для нахождения суммарной амплитуды применим метод векторных диаграмм (см. рис. 5.6). В случае  $\varphi=0$  все векторы, изображающие колебания от каждой полоски, параллельны, образуя «ниточку» длиной  $A_0$ , которой отвечает максимальная интенсивность  $I_0$ . С ростом угла  $\varphi$  «ниточка закручивается» на угол  $\delta = (2\pi/\lambda)a \sin \varphi$  (это –разность фаз, отвечающая разности хода от крайних полосок, которая равна  $a \sin \varphi$ ). Длина «ниточки» при достаточно малых углах  $\varphi$  остаётся постоянной, поэтому суммарная амплитуда  $A$  (в точке наблюдения) уменьшается, пока не станет равной нулю при  $\delta = 2\pi$ , т.е. если  $a \sin \varphi = \lambda$ . Полагая  $\lambda \ll a$ , получаем  $\sin \varphi \approx \varphi = \lambda / a$ . Читатель может самостоятельно убедиться, что при дальнейшем росте угла  $\varphi$  интенсивность снова проходит через ряд максимумов, величина которых, однако, много меньше  $I_0$ . Поэтому в основном свет при дифракции отклоняется на углы не больше, чем угол дифракционной расходимости  $\varphi = \lambda/a$ .

## 5.4. Дифракционная решетка

*Дифракционная решетка представляет собой совокупность большого числа узких щелей, разделенных непрозрачными промежутками – штрихами.*

Число штрихов доходит до нескольких тысяч на 1 мм. Если ширина прозрачной щели равна  $a$ , а ширина непрозрачных промежутков  $b$ , то величина

$$d = a + b \quad (5.11)$$

называется периодом решетки.

Согласно принципу Гюйгенса – Френеля, каждая щель является источником вторичных волн, распространяющихся по всем направлениям.

Найдем условие, при котором идущие от щелей волны усиливают друг друга. Выберем для этого волны, распространяющиеся в направлении, заданным углом  $\varphi$  (см. рис. 5.7). Разность хода между волнами от краев соседних щелей равна  $AC$ . Если на этом отрезке укладывается целое число длин волн, то волны от всех щелей будут усиливать друг друга. Поскольку  $AC = AB \sin \varphi = d \sin \varphi$ , то максимумы будут наблюдаться под углами  $\varphi$ , определяемыми условием:

$$d \sin \varphi = k\lambda, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (5.12)$$

На экране возникает дифракционная картина – чередование максимумов и минимумов (рис. 5.8).

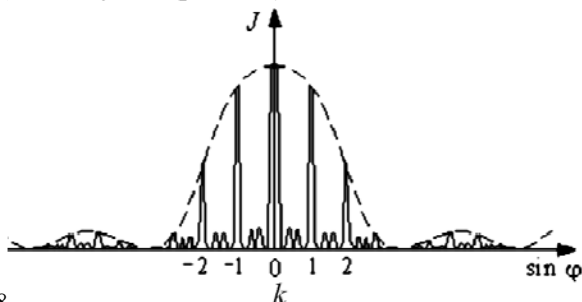


Рис. 5.8

Уравнение (5.12) даёт положения наиболее высоких (главных) максимумов. Если  $M$  – полное число щелей, то интенсивность главных максимумов в  $M^2$  раз больше, чем интенсивность, которую создала бы одна щель при том же угле  $\varphi$ . Пунктирная кривая показывает дифракционную картину от одной щели (при этом интенсивность умножена на  $M^2$ ).

**Пример 5.2.** На дифракционную решетку, имеющую плотность штрихов на единицу длины  $N$ , падает плоская монохроматическая волна с длиной волны  $\lambda$ . Определим наибольший порядок спектра, который можно наблюдать при нормальном падении лучей на решетку.

Период дифракционной решетки равен  $d = 1/N$ , поэтому из (5.12) имеем  $\frac{\sin \varphi}{N} = k\lambda$ . Наибольший угол, на который может от-

клониться падающий луч,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Он соответствует максимальному порядку спектра

$$k_{\max} = \left[ \frac{1}{N\lambda} \right],$$

где  $\left[ \frac{1}{N\lambda} \right]$  означает целую часть числа.

## Лекция 6. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ

Квантовая физика возникла на рубеже XIX и XX вв., первые наиболее важные результаты были опубликованы немецким физиком Максом Планком в 1900 г.

Какие экспериментальные данные привели к квантовым представлениям о строении и свойствах вещества?

### 6.1. Излучение нагретого тела

Подключим металлическую спираль к источнику регулируемого напряжения, для измерения температуры спирали используем термометр. При замыкании цепи спираль нагреется, но светиться не будет. Если недалеко от спирали поставить термопару, соединенную с гальванометром, то прибор отметит наличие теплового излучения, не воспринимаемого глазом. С ростом напряжения излучение спирали увеличивается, при температурах около 500 °С спираль начнет излучать красный свет. При повышении температуры интенсивность излучения возрастает, а цвет становится оранжевым, желтым и, наконец, белым.

Таким образом, с ростом температуры тела появляется излучение все более высоких частот, т.е. если тело нагреть до температур в несколько тысяч градусов, его излучение будет представлять сплошной спектр излучения, занимающий область от невидимого инфракрасного излучения до невидимого ультрафиолетового.

На рис. 6.1 изображены распределения интенсивности излучения  $I$  в спектре излучения спирали при различных температурах.



Объяснить распределение излучения нагретого твердого тела по длинам волн (или частотам) не удалось.

Объяснить распределение излучения нагретого твердого тела по длинам волн (или частотам) в рамках классической термодинамики не удалось. Для объяснения опытных данных Планк высказал предположение, что излучение нагретого тела происходит не непрерывно, а прерывисто, порциями – квантами, энергия которых пропорциональна частоте излучения:

$$E = h\nu, \quad (6.1)$$

где  $h$  – постоянная Планка,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

В 1905 г. А. Эйнштейн выдвинул гипотезу о том, что свет распространяется и поглощается также в виде квантов – фотонов.

Непосредственным подтверждением существования световых квантов (фотонов) является опыт Боте, схема которого приведена на рис. 6.2.

Тонкая металлическая фольга  $\Phi$ , освещенная сбоку пучком рентгеновских лучей, сама становится источником рентгеновских лучей. Счетчики  $C_1$  и  $C_2$  расположены симметрично. Попадание кванта электромагнитного излучения в каждый из них вызывает немедленное (меньше, чем  $10^{-3}$  с) срабатывание счетчика, импульс которого приводил в действие особые механизмы  $M_1$  и  $M_2$ , один из которых (связанный с соответствующим счетчиком) делал отметку на движущейся ленте.

Если от фольги во все стороны расходятся волны, то оба счетчика должны срабатывать одновременно. Если же фольга испускает кванты электромагнитного излучения, летящие то в одну, то другую сторону, то штрихи на ленте должны располагаться беспорядочно и лишь случайно могут оказаться одновременными. Опыт обнаружил

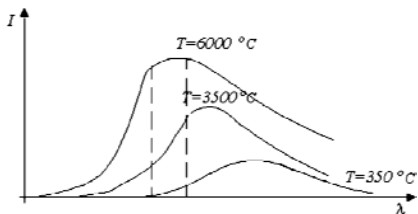


Рис. 6.1

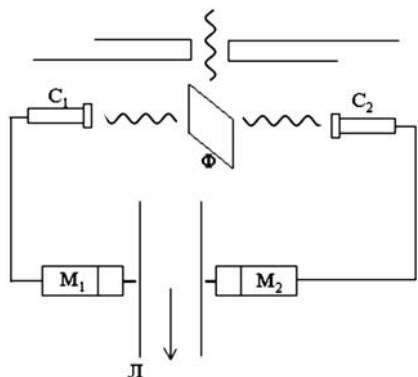


Рис. 6.2

вает беспорядочность показаний счетчиков, т.е. доказывает, что от фольги кванты летят то в одну, то в другую стороны.

Опыт Боте, таким образом, показал, что электромагнитное излучение распространяется в виде квантов (или фотонов). Фотон имеет энергию

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}. \quad (6.2)$$

Импульс фотона

$$p = \frac{E}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \frac{\hbar\omega}{c}. \quad (6.3)$$

Если ввести волновой вектор  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$ ,  $\vec{n}$  – единичный вектор, направленный вдоль скорости, то вектор импульса фотона

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}. \quad (6.4)$$

Фотон, таким образом, обладает энергией, импульсом. При этом в вакууме его скорость равна  $c \approx 300000$  км/с. Для фотона не может быть инерциальной системы отсчета, в которой бы он покоился – в любой инерциальной системе отсчета электромагнитное излучение распространяется с одной и той же скоростью  $c$ , о чем будет подробнее рассказано дальше.

**Пример 6.1.** Найдем показатель преломления среды, в которой свет с энергией фотона  $E$  имеет длину волны  $\lambda$ . По определению показатель преломления  $n = \frac{c}{v}$ . Поскольку  $\lambda = \frac{v}{\nu}$ , а  $E = h\nu$ , то

$$\lambda = \frac{v h}{E} \quad \text{и} \quad n = \frac{c}{v} = \frac{ch}{\lambda E}.$$

## 6.2. Фотоэффект

Рассмотрим теперь явление, в котором электромагнитное излучение ведет себя как поток фотонов.

**Внешний фотоэффект** – *испускание электронов веществом под действием света.*

Схема установки для изучения фотоэффекта изображена на рис. 6.3. Свет через окно  $O$  попадает в баллон, из которого откачан воз-

дух, и освещает катод  $K$ , изготовленный из исследуемого материала. Электроны, испускаемые катодом, под действием электрического поля, создаваемого батареей (напряжение можно менять с помощью потенциометра  $\Pi$ ), перемещаются к аноду  $A$ . В результате в цепи потечет ток, измеряемый гальванометром  $G$ .

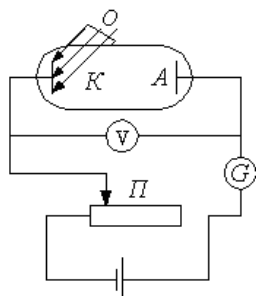


Рис. 6.3

**Зависимость тока  $i$  от напряжения  $U$  между электродами при неизменном потоке света, называется вольт-амперной характеристикой фотоэффекта.**

Как видно из рис. 6.4, фототок не исчезает при  $U = 0$ . Это свидетельствует о том, что электроны, вылетающие с катода, имеют некоторую скорость. Чтобы фототок исчез, надо приложить задерживающее напряжение на анод.

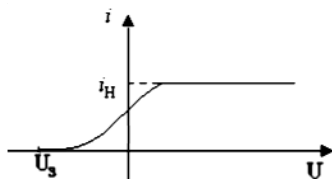


Рис. 6.4

Задерживающее напряжение определяется условием равенства максимальной кинетической энергии электронов энергии, теряемой при прохождении задерживающей разности потенциалов:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU_3, \quad (6.5)$$

где  $m$  – масса электрона и  $e$  – его заряд.

Из вольт-амперной характеристики видно, что при возрастании ускоряющей разности потенциалов фототок также возрастает, а затем достигает предельной величины, называемой током насыщения. Ток насыщения достигается тогда, когда все электроны, испускаемые катодом под действием света, попадают на анод. Оказывается, что при неизменном спектральном составе падающего на катод света ток насыщения пропорционален потоку энергии света  $\Phi$ :

$$i_{\text{нас}} \sim \Phi. \quad (6.6)$$

Это утверждение известно как закон Столетова.

При этом задерживающее напряжение  $U_3$  зависит не от интенсивности света, а только от его частоты, причем зависимость линейная:

$$U_3 = av - \varphi, \quad (6.7)$$

где коэффициент  $a$  не зависит от материала катода. Тогда из соотношений (6.6) и (6.7) имеем:

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = e(av - \varphi). \quad (6.8)$$

Поэтому электроны смогут покинуть катод лишь при выполнении условия  $av \geq \varphi$  или  $v \geq v_0 = \frac{\varphi}{a}$ . Соответственно, для длин волн получаем:

$$\lambda \leq \lambda_0 = \frac{ac}{\varphi} \quad (c - \text{скорость света}).$$

**Величины  $v_0$  и  $\lambda_0$  называются красными границами фотоэффекта для данного вещества.**

Отметим, что само по себе явление фотоэффекта не противоречит представлениям волновой оптики. В самом деле, под действием света (электромагнитной волны) электроны вещества будут совершать вынужденные колебания с амплитудой, пропорциональной амплитуде падающей волны. И при достаточно большой амплитуде колебаний электроны могут оторваться от вещества. Но при этом скорость электронов должна увеличиваться с ростом интенсивности падающего света. Однако опыт показывает, что скорость электронов зависит не от интенсивности падающего света, а от его частоты. Именно такая зависимость противоречит представлениям волновой оптики.

С квантовой точки зрения явление фотоэффекта объяснил А. Эйнштейн. *Согласно А. Эйнштейну, квант, падающий на поверхность, поглощается электроном в веществе. При этом электрон получает энергию  $E = h\nu$ , часть которой  $A$  затрачивается им на преодоление связи с веществом, оставшаяся часть составляет кинетическую энергию вылетевшего электрона.*

*Энергия  $A$ , называемая работой выхода, – это наименьшая энергия, необходимая для того, чтобы электрон мог покинуть вещество.*

Отметим, что работа выхода различна для различных веществ. Оставшаяся часть энергии образует кинетическую энергию электрона. Закон сохранения энергии для самых быстрых электронов, вылетающих с поверхности:

$$h\nu = \frac{mv_{\max}^2}{2} + A. \quad (6.9)$$

Это – формула Эйнштейна для фотоэффекта. Она показывает, что максимальная скорость фотоэлектронов определяется частотой падающего света и работой выхода электронов из вещества.

Формула Эйнштейна объясняет наличие красной границы. Фотоэффект будет наблюдаться для частот:

$$\nu \geq \nu_0 = \frac{A}{h}. \quad (6.10)$$

Теория Эйнштейна объясняет и пропорциональность тока насыщения потоку энергии падающего света. Действительно, величина потока энергии определяется числом квантов света, падающих на поверхность в единицу времени, а число освобождаемых электронов пропорционально числу падающих квантов света.

**Пример 6.2.** Изобразим графически зависимость максимальной скорости фотоэлектронов от длины волны падающего на образец излучения при внешнем фотоэффекте.

Из уравнения Эйнштейна

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$$

имеем

$$v = \sqrt{\frac{2(h\nu - A)}{m}} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{hc}{\lambda} - A \right)}.$$

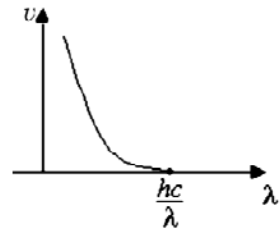


Рис. 6.5

График  $v = f(\lambda)$  имеет вид, показанный на рис. 6.5.

**Пример 6.3.** Изобразим графически вольт-амперные характеристики двух вакуумных фотодиодов, отличающихся только работой выхода материала катода. Длина волны падающего на катод монохроматического излучения, потоки фотонов и фотоэлектронов одинаковы.

Из уравнения Эйнштейна  $h\nu = A + \frac{mv^2}{2}$  следует: чем больше работа выхода при  $h\nu = \text{const}$ , тем меньше  $\frac{mv^2}{2}$ , а следовательно, и

ток, в том числе и ток насыщения. Поэтому вольт-амперные характеристики будут выглядеть, как показано на рис. 6.6.

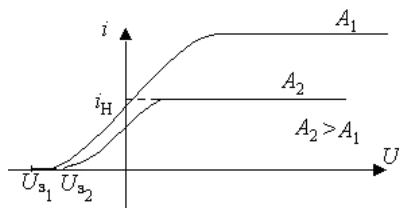


Рис. 6.6

### 6.3. Основные принципы квантовой механики

Ряд экспериментальных фактов, рассмотренных в этой лекции, свидетельствуют о том, что электромагнитное излучение, имея волновую природу, является в то же время потоком частиц – фотонов. При этом свет не перестаёт быть волной даже при очень малой интенсивности, когда фотоны пролетают, например, через щели дифракционной решётки поодиночке, один за другим. Таким образом, фотон проявляет **корпускулярно-волновой дуализм** (двойственность) своей природы.

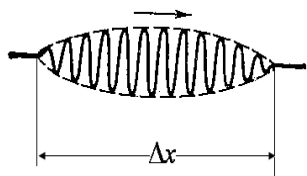


Рис. 6.7

Фотон, т.е. частицу, которая в то же время является и волной, можно представить себе в виде *волнового пакета* (рис. 6.7). Это – бегущая волна, ограниченная в пространстве. Её амплитуда быстро убывает в обе стороны от середины пакета, обращаясь практически в ноль на некотором расстоянии  $\Delta x/2$  от середины. Поэтому фотон как частица не имеет определённой координаты  $x$ , значения его координаты «размазаны» в пределах  $\Delta x$ . Средствами высшей математики можно показать, что волновой пакет независимо от физической природы колебаний образован наложением множества монохроматических волн (таких волн «в чистом виде», т.е. бесконечных синусоид, в природе практически не бывает) со всевозможными длинами. Амплитуды этих волн убывают при удалении длины волны от некоторого среднего значения  $\lambda_0$  (другими словами, при удалении модуля волнового вектора  $k$  от среднего значения  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ).

Поэтому фотон как частица не имеет определённой координаты  $x$ , значения его координаты «размазаны» в пределах  $\Delta x$ . Средствами высшей математики можно показать, что волновой пакет независимо от физической природы колебаний образован наложением множества монохроматических волн (таких волн «в чистом виде», т.е. бесконечных синусоид, в природе практически не бывает) со всевозможными длинами. Амплитуды этих волн убывают при удалении длины волны от некоторого среднего значения  $\lambda_0$  (другими словами, при удалении модуля волнового вектора  $k$  от среднего значения  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ ).

Основной вклад в общую интенсивность вносят волны, для которых значения  $k$  лежат в пределах от  $k_0 - \Delta k/2$  до  $k_0 + \Delta k/2$ , при этом ширина интервала  $\Delta k$  удовлетворяет условию

$$\Delta k \cdot \Delta x \cong 1 \quad (6.11)$$

(обозначение  $\cong$  означает «равно по порядку величины»).

Монохроматическая волна получается в предельном случае  $\Delta k \rightarrow 0$ , при этом  $\Delta x \rightarrow \infty$ , как видно из уравнения (6.11). Вспомнив уравнение (6.4) для импульса фотона, заметим, что импульс фотона также не является определённой величиной, его неопределённость составляет  $\Delta p = \hbar \Delta k$ . Умножив уравнение (6.11) на постоянную Планка  $\hbar$ , приходим к *соотношению неопределённости* «координата – импульс» для фотона (предполагается, что фотон движется вдоль оси  $x$ ):

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar. \quad (6.12)$$

Фотон отличается от других микрочастиц (таких, как электрон, протон и др.) тем, что его нельзя остановить, у него нет массы (точнее – массы покоя, о которой поговорим в следующей лекции). Это обстоятельство не помешало Л. де Бройлю в 1924 г. выдвинуть гипотезу, что волновыми свойствами обладают не только частицы света – фотоны, но и все микрочастицы (электроны, атомные ядра, молекулы и т. д.). Движение любой частицы можно рассматривать как волновой процесс, при этом длина волны связана с импульсом частицы (точнее, средним значением её импульса  $p_0$ ) так же, как в случае фотона:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{p_0}. \quad (6.13)$$

Если частица заключена в ограниченной области пространства, её следует рассматривать как стоячую волну. Это обстоятельство приводит к результатам, которые необъяснимы с точки зрения классической физики, но согласуются с опытом (см. пример ниже).

Эта гипотеза в дальнейшем была подтверждена многочисленными опытами, например, наблюдалась дифракция электронного пучка на кристаллах.

**Пример 6.4.** Почему мы не наблюдаем волновых свойств у макроскопических тел? Найдем, например, длину волны, соответ-

ствующую телу массой  $m = 1$  г, двигающемуся со скоростью  $v = 1$  см/с:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv} \leq 10^{-28} \text{ м}.$$

Это очень маленькая величина, которая вряд ли может быть обнаружена экспериментально. Для электрона же при скорости  $v = 10^6$  м/с  $\lambda \approx 8 \cdot 10^{-8}$  см, что сравнимо с межатомными расстояниями в кристалле. Поэтому волновые свойства электронов и проявляются при их рассеянии в кристаллах.

Уравнение (6.12) является одним из проявлений **принципа неопределённости**, сформулированного В. Гейзенбергом в 1927 г. Принцип неопределённости, неразрывно связанный с принципом корпускулярно-волнового дуализма, лежит в основе квантовой механики. Согласно этому принципу существуют пары физических величин, характеризующих данную частицу или систему частиц, которые принципиально не могут иметь определённых значений в данный момент времени (например, координата и проекция импульса на соответствующую ось, энергия и момент времени, в который она измеряется).

Таким образом, само понятие *траектории* частицы, строго говоря, становится бессмысленным. Квантовая механика позволяет определять только *вероятности* (в зависимости от времени) тех или иных значений координаты, импульса, энергии и других физических характеристик частицы при данных условиях. Естественно, квантовая механика не «отменяет» классическую совсем. Законы и понятия классической механики приближённо справедливы в случае, если де-бройлевская длина волны (6.13) много меньше минимального из характерных размеров данной физической задачи (например, той длины, на которой значительно изменяется потенциальная энергия частицы, см. пример). Здесь уместна аналогия с переходом от волновой к геометрической оптике.

**Пример 6.5.** Какие значения энергии может иметь частица массой  $m$ , которая свободно движется вдоль оси  $x$  в области  $0 < x < L$ , упруго отражаясь от неподвижных стенок с координатами  $x = 0$  и  $x = L$ ?

С классической точки зрения, ответ очевиден – энергия может быть любой (пока стенки выдерживают удар). Однако, принимая во



внимание волновые свойства частицы, её надо считать стоячей волной с де-бройлевской длиной  $\lambda_0$ . Поскольку стенки неподвижны (не колеблются), амплитуда колебаний должна быть равна нулю при  $x = 0$  и  $x = L$ . Математически задача подобна колебаниям струны с закреплёнными концами (см. рис. 2.3; здесь мы не рассматриваем вопрос о физическом смысле волнового движения частицы).

Таким образом,  $\lambda_0 = 2L/n$ ,  $n=1, 2, 3\ldots$ . Выражая энергию частицы через её импульс  $E = p_0^2/2m$  и импульс через длину волны из уравнения (6.13), получаем:

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2.$$

Таким образом, энергия (как и импульс) частицы не может быть любой, а определяется целым числом  $n$ . Данное явление – **квантование** – типично для микрочастиц, движение которых ограничено некоторой областью пространства.

## Лекция 7. ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

### 7.1. Экспериментальные основы специальной теории относительности

Как известно, покоящийся заряд связан с электростатическим полем, а движущийся – с электромагнитным. Поэтому поля покоящихся и движущихся зарядов, в частности движущихся прямолинейно и равномерно, не равноценны.

В самом деле, рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $K$  и  $K_0$ , причем последняя связана с движущимся равномерно и прямолинейно зарядом. По принципу относительности Галилея эти системы должны быть механически равноправными. Но в отношении электромагнитных явлений системы отсчета  $K$  и  $K_0$  неравноправны, так как в системе отсчета  $K$  есть, кроме электрического, еще и магнитное поле.

Эти рассуждения показывают, что в электродинамике принцип относительности Галилея несправедлив.

Для устранения этого и ряда других противоречий в XIX в. выдвигалось много гипотез, проводились и их экспериментальные проверки.

В частности, в XIX в. считалось, что электромагнитные волны, подобно механическим волнам, распространяются в некоторой среде, названной эфиром. Впервые гипотезу эфира выдвинул в 1678 г. Гюйгенс. Указанное выше неравноправие в состоянии покоя и движения заряда должно проявляться при взаимодействии движущегося заряда с эфиром. Предполагалось, что вследствие этого взаимодействия и возникает магнитное поле.

Однако от такого объяснения происхождения электромагнитного поля пришлось отказаться после экспериментов А. Майкельсона и Э. Морли (1881 и 1887 гг.).

**Опыты Майкельсона и Морли.** В этих опытах на каменной плите, помещенной в ртуть, устанавливался интерферометр. Свет от монохроматического источника падал на полупрозрачную пластину и разделялся на два когерентных пучка со взаимно перпендикулярными направлениями. После отражения от зеркал, установленных на плите, оба пучка попадали в зрительную трубу, где наблюдалась интерференционная картина. Из-за несимметричности обоих направлений распространения света – одно параллельное орбитальной скорости Земли, другое – ей перпендикулярное, картина интерференции, как ожидалось, должна изменяться при повороте интерферометра на  $90^\circ$ , т.е. эфир должен был оказывать различное воздействие на каждый из световых пучков. Однако наблюдаемая картина интерференции не выявила различий в условиях прохождения света.

Эксперименты Майкельсона и Морли свидетельствовали об ошибочности представления о неподвижности эфира. Вообще идея эфира оказалась несостоятельной.

Результат опытов Майкельсона показал, что скорость света как в направлении движения Земли, так и в перпендикулярном направлении оказывается одинаковой и это можно трактовать так, что классическое правило сложения скоростей несправедливо для электромагнитных волн.

**Конечность и абсолютность скорости света.** Как следует из уравнений Максвелла и экспериментально установлено, электро-

магнитные волны (и свет, в частности) распространяются в вакууме со скоростью примерно 300000 км/с. Относительно какой системы отсчета скорость света имеет такое значение? Ведь классическая механика не допускает абсолютной скорости у материальных объектов. Действительно, согласно классическому закону сложения скоростей:  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ , где  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}'$  – скорости относительно разных инерциальных систем отсчета,  $\vec{V}$  – скорость одной из систем отсчета относительно другой. Тогда равенство  $\vec{v} = \vec{v}'$  возможно лишь при  $\vec{V} = 0$ .

Если бы скорость света подчинялась классическому закону сложения скоростей, то существовал бы в вакууме свет медленный и быстрый от источников, по-разному движущихся в данной системе отсчета. Но, в частности, результаты опытов Майкельсона противоречат этому.

Таким образом, можно считать твердо установленным экспериментальным фактом конечность и абсолютность скорости света в вакууме (в данном случае независимость скорости света от скорости движения его источников или приемников).

**Другие экспериментальные факты**, которые не удается объяснить на основании классических представлений о движении частиц (эти эксперименты выполнены уже после разработки теории относительности):

а) обнаружено, что время жизни (от рождения до распада) движущейся элементарной частицы (например,  $\pi$ -мезона) больше времени жизни такой же покоящейся частицы. Этот экспериментальный факт противоречит абсолютности времени в классической механике;

б) эксперименты по ускорению элементарных частиц (электронов, протонов) показали, что эти частицы не удается разогнать до световой скорости, несмотря на значительные затраты энергии. В самом деле, для ускорения электрона массой  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг до скорости света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, кажется, достаточно энергии

$$W = \frac{mc^2}{2} = 4,1 \cdot 10^{-14} \text{ Дж} = 0,25 \cdot 10^6 \text{ эВ};$$

электронные ускорители рассчитаны на энергии, превышающие указанную энергию в десятки и сотни раз, тем не менее, скорости электронов не достигают скорости света;

в) превращение элементарных частиц. Известно, что сумма масс системы элементарных частиц до столкновения не равна суммарной массе всех новых частиц, образовавшихся после столкновения. Эти процессы также не описываются законами классической механики, в которой масса системы частиц тождественно равна их суммарной массе.

Таким образом, необходимо отказаться от представления о том, что классическая механика пригодна для объяснения всех физических явлений. Есть границы применимости классической механики, за пределами которых нужны новые идеи о свойствах пространства и времени.

## 7.2. Принципы специальной теории относительности

Новые представления о пространстве и времени введены А. Эйнштейном в 1905 г. и названы специальной теорией относительности (СТО).

В основе СТО лежат два принципа – принцип относительности и принцип постоянства скорости света.

*Принцип относительности А. Эйнштейна: все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета; все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.*

Как можно заметить, принцип относительности А. Эйнштейна является обобщением принципа относительности Галилея в классической механике.

*Принцип постоянства скорости света: скорость света в вакууме одинакова в любой инерциальной системе отсчета и не зависит от скорости источника или приемника.*

Другая формулировка: *совокупность всех инерциальных систем отсчета характеризуется абсолютной, конечной и постоянной величиной с размерностью скорости.*

Тот факт, что скорость света не зависит от скорости источника, подтверждается наблюдением двойных звезд.

Астроном В. де Ситтер в 1913 г. наблюдал движение двойных звезд. В системе двух звезд происходит их вращение вокруг общего центра масс, поэтому в момент излучения света вектор скорости одной из звезд направлен к наблюдателю, а другой – в противоположную сторону. Если бы скорость света зависела от скорости звезд, то из-за их большой удаленности от Земли происходило бы заметное искажение картины движения этих звезд, чего де Ситтер не обнаружил.

Аналогичный опыт, но уже по распространению света от Солнца, был поставлен в 1955 г. А.М. Бонч-Бруевичем. Известно, что Солнце вращается вокруг своей оси, имея линейную скорость в крайней точке солнечного диска  $\sim 2$  км/с. Поэтому можно изучать распространение света от противоположных точек солнечного диска. Однако в пределах точности скорости обеих световых волн оказались одинаковыми.

### 7.3. Пространство и время в СТО

**Координатное и собственное время.** Как следует из второго принципа СТО, частицы, движущиеся со скоростью света, не могут находиться в покое. *Состояние покоя имеет смысл только для частиц, движущихся со скоростью, меньшей скорости света. Систему отсчета, где такая частица покоится, назовем собственной системой отсчета  $K_0$ .*

*Под собственным временем  $\tau_0$  будем понимать промежуток времени между двумя событиями, относящимися к частице, и определенный в ее собственной системе отсчета.*

Пусть в произвольной системе  $K$  частица  $A$  равномерно движется со скоростью  $\vec{v}$  от точки  $a$  до точки  $b$ , где она находится в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  по часам системы отсчета  $K$ . События  $(A, a) = (A \text{ в точке } a)$  и  $(A, b)$  происходят в разных пространственных точках.

*Время, измеренное по часам в той системе отсчета  $K$ , относительно которой частица движется, называется координатным временем  $\tau$ .*

Поэтому промежуток времени в системе  $K$ :  $\tau = t_2 - t_1$ . В системе отсчета  $K_0$  события происходят в одной пространственной точке и промежуток времени между событиями  $(A, a)$  и  $(A, b)$  в системе  $K_0$  равен собственному времени  $\tau_0$  частицы для этих событий. Это время определяется по часам системы отсчета  $K_0$ :  $\tau_0 = t_{02} - t_{01}$ . Очевидно, что собственное время частицы абсолютно (инвариантно), т.е. оно не меняется при переходе из одной инерциальной системы в другую.

Действительно, при рассмотрении покоящейся частицы в одной системе отсчета и в другой инерциальной системе, в которой частица тоже покоится, можно сказать, что с частицей физически ничего не происходит: не меняется ни длительность процессов, ни их последовательность. Поэтому не меняется и собственное время.

Совпадает ли координатное  $\tau$  и собственное время  $\tau_0$ ? В классической механике  $\tau = \tau_0 = \text{invariant}$ , так как в основе этой теории лежит постулат абсолютности времени для всех инерциальных систем отсчета.

Абсолютность времени в классической механике означает, что события, одновременные в одной инерциальной системе отсчета, будут одновременными и в любой другой инерциальной системе.

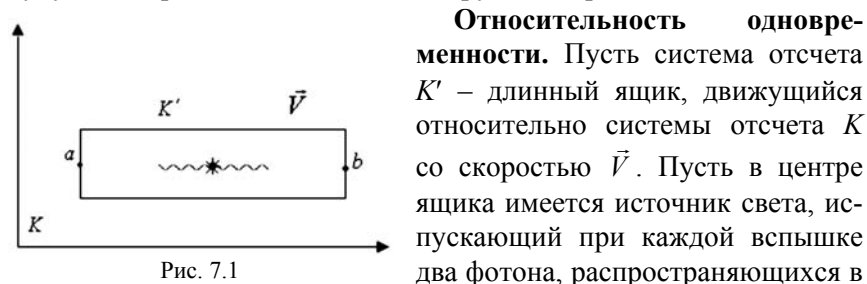


Рис. 7.1

**Относительность одновременности.** Пусть система отсчета  $K'$  — длинный ящик, движущийся относительно системы отсчета  $K$  со скоростью  $\vec{V}$ . Пусть в центре ящика имеется источник света, испускающий при каждой вспышке два фотона, распространяющихся в

противоположных направлениях к точкам  $a$  и  $b$  (рис. 7.1). Очевидно, что в системе отсчета  $K'$  столкновения фотонов со стенками в точках  $a$  и  $b$  будут одновременными событиями. Относительно системы отсчета  $K$  точки  $a$  и  $b$  движутся со скоростью  $\vec{V}$ , так что одному фотону точку надо догонять, а к другому фотону точка  $a$  движется навстречу. Поскольку скорости фотонов в обеих системах одинаковы и равны  $c$ , то столкновение фотона с левой стенкой произойдет раньше, чем другой фотон столкнется с правой стенкой

в точке  $b$ . Таким образом, в системе  $K$  события соударений фотонов со стенками будут неодновременными. Поэтому относительность одновременности разноместных событий означает отсутствие абсолютного времени для всех инерциальных систем отсчета.

**Связь собственного и координатного времени.** Рассмотрим мысленный опыт со “световыми часами”, устроенными следующим образом (рис. 7.2). На концах стержня длиной  $l$  закреплены два параллельных зеркала. Между зеркалами движется короткий световой импульс. Световые часы неподвижны в системе  $K'$ .

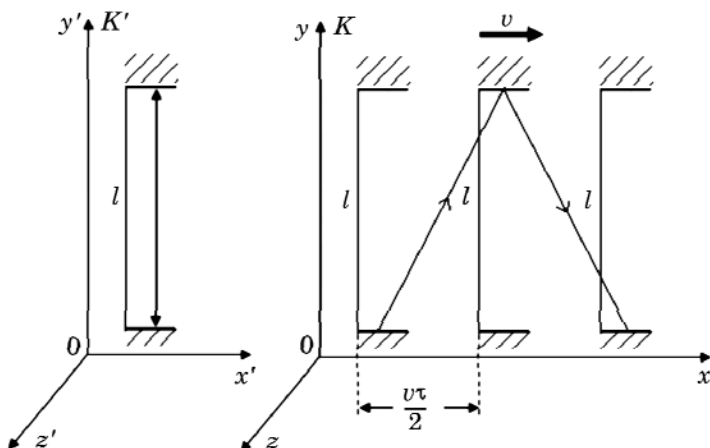


Рис. 7.2

Рассмотрим один цикл таких часов, (т.е. движение светового импульса от нижнего зеркала его отражение от верхнего и возвращение назад) в системе  $K'$  и  $K$ . В системе  $K'$  выход и возвращение светового импульса происходят в одной точке. Промежуток времени между ними равен  $\tau_0 = 2l / c$ . С точки зрения системы  $K$  часы находятся в движении, и световой импульс движется между зеркалами зигзагообразно. Следовательно, за один цикл световой импульс пройдет путь

$$c\tau = 2\sqrt{l^2 + \left(\frac{v\tau}{2}\right)^2},$$

откуда выразим  $\tau$ :

$$\tau = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Так как  $\tau_0 = 2l/c$  получаем связь между собственным и координатным временем:

$$\tau = \tau_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.1)$$

Из этой формулы следует, что  $\tau > \tau_0$ , т.е. координатное время некоторого события больше собственного времени этого события. Отметим, что это соотношение подтверждено в экспериментах по изучению времени жизни элементарных частиц – обнаружено различие между временем существования движущейся элементарной частицы (например,  $\pi$ -мезон) и ее собственным временем жизни.

**Относительность расстояний (пространственных масштабов).** Подобно временным промежуткам расстояние (пространственный масштаб) не является абсолютной величиной, а зависит от скорости движения тела относительно заданной системы отсчета.

Если  $l_0$  – длина стержня в системе отсчета  $K_0$ , относительно которой стержень покоится (собственная длина стержня), то длина  $l$  этого стержня в системе отсчета  $K$ , относительно которой стержень движется со скоростью  $v$ , направленной вдоль стержня:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (7.2)$$

Как видно из этой формулы,  $l < l_0$ . В этом состоит релятивистское сокращение размеров тела в движущихся системах отсчета.

**Пример 7.1.** Треугольник, собственная длина каждой стороны равна  $a$ . Найти периметр этого треугольника в системе отсчета, движущейся относительно него с постоянной скоростью  $v$  вдоль одной из его биссектрис (рис. 7.3).

В собственной системе отсчета периметр треугольника равен  $P_0 = 3a$ . В системе отсчета, относительно которой треугольник движется, уменьшаются размеры вдоль направления движения (вдоль оси  $x$ ) и не изменяются размеры, перпендикулярные этому направ-



лению (вдоль оси  $y$ ). Пусть  $l$  – длина стороны  $AC$  или  $BC$ . Тогда  $l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$ , где  $l_x$  и  $l_y$  – соответствующие проекции сторон  $AC$  или  $BC$ . Поскольку

$$l_x = l_{0x} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad l_y = l_{0y}$$

и 
$$l_{0x} = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \quad l_{0y} = \frac{a}{2},$$

то

$$l = \frac{a}{2} \sqrt{3 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + 1} = \frac{a}{2} \sqrt{4 - 3 \left( \frac{v^2}{c^2} \right)}.$$

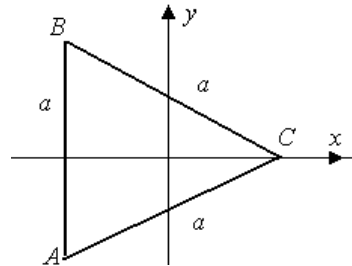


Рис. 7.3

Периметр треугольника в системе отсчета, движущейся относительно него с постоянной скоростью  $v$  вдоль одной из его биссектрис:

$$P = a + 2l = \left[ 1 + \sqrt{4 - 3 \left( \frac{v^2}{c^2} \right)} \right] a.$$

В пределе  $v \ll c$  имеем  $P \approx (1 + \sqrt{4})a = 3a$ . В пределе  $v \rightarrow c$   $P = (1 + \sqrt{4 - 3})a = 2a$ , т.е. в этом случае углы  $\angle ABC = \angle BAC = 0$ .

#### 7.4. Преобразования Лоренца.

##### Релятивистский закон преобразования скорости

Формулы (7.1) и (7.2), связывающие промежутки времени и расстояния между точками в разных системах отсчета, позволяют написать релятивистский закон преобразования координат и времени произвольного события при переходе от одной системы отсчета к другой. Этот закон должен заменить основанные на классических представлениях о пространстве и времени преобразования Галилея.

Рассмотрим  $K$ -системе и движущуюся относительно нее со скоростью  $v$  систему  $K'$  (рис. 7.4). Координата  $x$  есть собственная длина  $l_0$  отрезка  $OB$ , неподвижного в  $K$ -системе. Длина этого же отрезка в  $K'$ -системе, где измерения производятся в момент времени  $t'$ , есть  $x' + vt'$ . Учитывая соотношение (7.2), получим

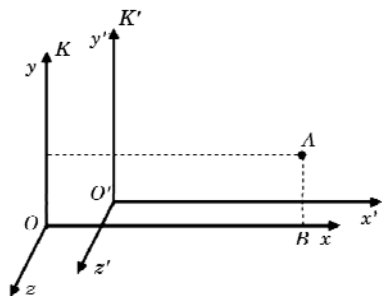


Рис. 7.5

$$x' + vt' = x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

откуда

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.3)$$

Координата  $x'$  есть собственная длина отрезка  $O'B$ , неподвижного в  $K'$ -системе. Длина этого же отрезка в  $K$ -системе, измеренная в момент времени  $t$  по часам  $K$ , равна  $x - vt$ . Учитывая соотношение (7.2), получим

$$x - vt = x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

откуда

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.4)$$

Формулы (7.3) и (7.4) позволяют также найти связь между временем  $t$  и  $t'$  одного и того же события в обеих системах отсчета. Исключая из (7.3) и (7.4) сначала  $x$ , а затем  $x'$ , найдем

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.5)$$

Таким образом, релятивистские формулы преобразования координат некоторого события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой имеют вид:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (7.6)$$

Преобразования Лоренца для координат и времени события при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой позволяют получить и закон преобразования скорости частицы

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}, \quad (7.7)$$

где  $u$  – скорость частицы относительно системы  $K$ .

Заметим, что эта формула применима только тогда, когда все три вектора  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}'$  и  $\vec{v}$  направлены по одной прямой.

### 7.5. Эффект Доплера

С этим явлением мы часто сталкиваемся, когда стоим на платформе, а мимо движутся поезда. Если машинист при этом сигнализирует, то мы замечаем, как изменяется частота воспринимаемого нами звука от скорости движущегося поезда. Это – эффект Доплера, наблюдающийся как для звуковых, так и для световых волн.

Выберем источник, испускающий световые волны с частотой  $\nu_0$  в покоящейся системе отсчета  $K_0$ , а наблюдатель (система отсчета  $K$ ) движется со скоростью  $\vec{v}$ , составляющей угол  $\theta$  с направлением светового луча.

В системе  $K_0$  за время  $\tau_0$  в волне происходит  $N_0 = \nu_0 \tau_0$  колебаний. Для наблюдателя это явление происходит за время

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

при этом частота воспринимаемого им света изменяется и становится равной  $\nu$ . Поэтому наблюдатель воспринимает  $N = \nu \tau$  колебаний. Если наблюдатель удаляется от источника, он за время  $\tau$  воспринимает меньшее число колебаний, чем если бы он покоился. Это уменьшение числа воспринимаемых колебаний  $\Delta N$  равно числу длин волн, укладываемых на отрезке  $AB = AC \cos \theta = \nu \tau_0 \cos \theta$  (рис. 7.5). Общее же число колебаний  $N$ , дошедших до наблюдателя, равно числу длин волн, укладываемых на отрезке  $OB = c \tau_0$ . Поэтому

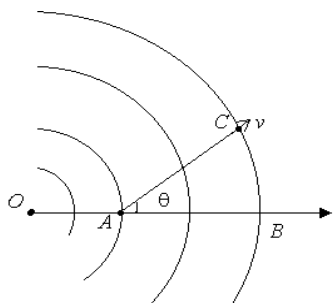


Рис. 7.5

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{AB}{OB} = \frac{v\tau_0 \cos \theta}{c\tau_0} = \frac{v}{c} \cos \theta.$$

Но

$$N = N_0 - \Delta N = N_0 - \frac{Nv \cos \theta}{c}.$$

Отсюда имеем

$$N \left( 1 + \frac{v}{c} \cos \theta \right) = N_0.$$

Подставив сюда значение величин  $N_0$ ,

$N$  и  $\tau$ , получим

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}. \quad (7.8)$$

Это и есть формула, выражающая собой эффект Доплера. Интересен частный случай, а именно, продольный эффект Доплера.

Пусть наблюдатель удаляется от источника света вдоль луча, тогда  $\theta = 0$ , поэтому частота

$$v_{\text{удал}} = v_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} = v_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}, \quad v_{\text{удал}} < v_0. \quad (7.9)$$

Если наблюдатель приближается к источнику света вдоль луча, то  $\theta = \pi$  и частота

$$v_{\text{прибл}} = v_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = v_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}, \quad v_{\text{прибл}} > v_0. \quad (7.10)$$

Поэтому если наблюдатель удаляется от источника света или, наоборот, источник света удаляется от наблюдателя, то воспринимаемая наблюдателем частота света уменьшается. Наблюдатель обнаружит, что все линии спектра смещаются в сторону красного света (красное смещение).

Это явление очень важно для астрономии. Именно по красному смещению спектральных линий в спектрах галактик удалось обнаружить эффект расширения Вселенной.

## 7.6. Энергия, импульс и масса в релятивистской динамике

В классической механике скорость частицы может неограниченно возрастать. Действительно, при равноускоренном движении  $v = at$  и при  $t \rightarrow \infty$   $v \rightarrow \infty$ . Однако, как мы знаем, принципы СТО ограничивают скорости материальных объектов  $v \leq c$ . Частицы, движущиеся со скоростью  $v = c$ , предельно инерционны, т.е. их нельзя ни ускорить, ни замедлить. Естественно поэтому считать их безмассовыми. К безмассовым частицам относятся фотоны и нейтрино.

Для безмассовых частиц энергия  $E$  и импульс  $p$  связаны между собой следующим образом:

$$E^2 - p^2 c^2 = 0. \quad (7.11)$$

Все другие частицы движутся со скоростями  $v < c$ , назовем их массивными частицами. В собственной системе отсчета массивной частицы, где ее импульс равен нулю, энергия  $E_0$  отлична от нуля. Поскольку масса частицы  $m_0$  и  $E_0$  не зависят от выбора инерциальной системы отсчета, постулируем линейную взаимосвязь этих величин:

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (7.12)$$

Для массивных частиц:

$$E^2 - p^2 c^2 = E_0^2 = m_0^2 c^4. \quad (7.13)$$

Заметим, что это соотношение справедливо и для безмассовых частиц при  $m_0 = 0$ . В классической механике импульс частицы  $\vec{p} = m_0 \vec{v}$ . В релятивистской механике импульс определяется иначе:

$$\vec{p} = \frac{E \vec{v}}{c^2}. \quad (7.14)$$

Тогда, подставив это выражение в соотношение (7.10), получим:

$$E = \gamma m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.15)$$

где  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ . Поэтому формулу для релятивистского импульса

можно записать в виде

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \vec{v}. \quad (7.16)$$

Из этой формулы следует, что в пределе малых скоростей  $v \ll c$  релятивистский импульс переходит в классический импульс  $\vec{p} = m_0 \vec{v}$ . Кинетическую энергию массивной частицы определим как разность ее релятивистской и собственной энергий:

$$K = E - E_0 = (\gamma - 1)m_0 c^2. \quad (7.17)$$

Отсюда следует, что при  $v \rightarrow c$  кинетическая энергия массивной частицы  $K \rightarrow \infty$ , т.е. ее нельзя разогнать до скорости света.

Заметим, что при  $v \ll c$  величина

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2},$$

поэтому при  $v \ll c$  кинетическая энергия массивной частицы переходит в классическое значение  $K = \frac{m_0 v^2}{2}$ .

В этом заключается **принцип соответствия: применение новой, более общей физической теории к области, где справедлива менее общая физическая теория, должно дать те же результаты, что и при использовании расчетных формул более общей теории.**

## 7.7. Основное уравнение релятивистской динамики

В классической механике основное уравнение динамики имеет вид:  $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ . При этом производная кинетической энергии по времени, т.е. мощность, расходуемая на ускорение частицы, равна

$N = \frac{dK}{dt} = \vec{F} \vec{v}$ . Представим себе, что движение происходит под дей-

ствием постоянной силы, тогда из уравнения  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  следует, что

частица движется равноускоренно, и ее скорость может превысить предельное значение скорости, равное  $c$ . Однако при использовании выражения для релятивистского импульса

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

и уравнения динамики  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  не возникает противоречий с существованием предельной скорости. Действительно, из выражения

$$p = F \cdot t \text{ имеем } \gamma m_0 v = F \cdot t. \text{ Отсюда } \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{Ft}{m_0} \text{ или}$$

$$v = \frac{Ft / m_0}{\sqrt{1 + \left( \frac{Ft}{m_0 c} \right)^2}}. \quad (7.18)$$

Если частица движется под действием постоянной силы время  $t \ll \frac{m_0 c}{F}$ , то получаем  $v = \frac{Ft}{m_0}$  – известное выражение классиче-

ской механики. Если же  $t \gg \frac{m_0 c}{F}$ , то  $v \rightarrow c$ , оставаясь, однако, меньше предельной скорости.

Завершая обсуждение СТО, отметим, что теория относительности – учение о пространстве и времени, пришедшее на смену классическим представлениям.

**Пример 7.2.** Пусть частица с массой покоя  $m_0$  в момент времени  $t = 0$  начинает двигаться под действием постоянной силы  $F$ . Найдем зависимость от времени пройденного ею пути.

Поскольку из соотношения (7.18) скорость

$$v = \frac{Ft}{m_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}},$$

то, обозначив для краткости  $a = \frac{F}{m_0}$ , получаем выражение для пройденного пути:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t |v| dt = \int_0^t \frac{atdt}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} = \frac{c^2}{2a} \int_0^{\left(\frac{at}{c}\right)^2} \frac{dy}{\sqrt{y+1}} = \frac{c^2}{a} \sqrt{y+1} \Big|_0^{\left(\frac{at}{c}\right)^2} = \\ &= \frac{c}{a} \left[ \sqrt{(at)^2 + c^2} - c \right]. \end{aligned}$$

Возвращаясь к прежним переменным, получим

$$S = c \left[ \sqrt{t^2 + \left(\frac{m_0 c}{F}\right)^2} - \frac{m_0 c}{F} \right].$$

При малых временах  $t \ll \frac{m_0 c}{F}$   $S = \frac{F}{m_0} \frac{t^2}{2} = \frac{at^2}{2}$ . При  $t \gg \frac{m_0 c}{F}$

$S = ct$ .

## Лекция 8. ОСНОВЫ АТОМНОЙ ФИЗИКИ

### 8.1. Опыты Резерфорда

Известно, что все тела состоят из молекул и атомов. Размеры атомов составляют  $\sim 10^{-10}$  м. В состав атомов входят отрицательно заряженные электроны, и поскольку атом в целом обычно электрически нейтрален, встает вопрос о том, как по объему атома распределены положительные и отрицательные заряды.

Первым на этот вопрос в конце XIX в. попытался дать ответ английский физик Дж. Дж. Томсон. Он предположил, что атом уст-



роен подобно “пудингу с изюмом”: внутри положительно заряженной капли “плавают” отрицательно заряженные электроны – “изюминки”.

Распределение заряда внутри атома изучал также Э. Резерфорд.

В этих опытах изучалось рассеяние  $\alpha$ -частиц на тонких металлических фольгах. К тому времени (1911 г.) было известно, что  $\alpha$ -частицы имеют заряд  $q = +2e$ , где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, и при присоединении двух электронов превращается в атомы гелия.

Схема опыта Резерфорда приведена на рис. 8.1. Внутри свинцовой оболочки  $O$ , поглощающей радиоактивное излучение, помещался радиоактивный источник  $P$ . Через отверстие в оболочке выходит направленный пучок  $\alpha$ -частиц, на пути которого помещается металлическая фольга  $\Phi$ .

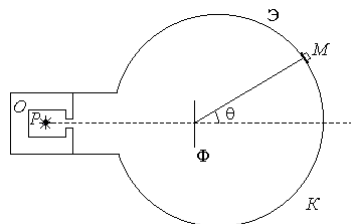


Рис. 8.1

При прохождении через фольгу  $\alpha$ -частицы отклоняются на угол  $\theta$  и попадают на экран  $\mathcal{E}$ , на котором возникает вспышка, наблюдаемая с помощью микроскопа  $M$ . Экран и микроскоп могут вращаться, это позволяет регистрировать число  $\alpha$ -частиц, отклонившихся в фольге на разные углы. Наконец, вся установка помещена в кожух  $K$ , из которого откачивается воздух. Опыт показал, что большинство  $\alpha$ -частиц проходит через фольгу, практически не отклоняясь от первоначального направления. Однако были и  $\alpha$ -частицы, отклонившиеся на большие углы, в том числе близкие к  $180^\circ$ .

В модели атома Томсона таких  $\alpha$ -частиц вообще не должно было быть.

Анализируя эти данные, Резерфорд пришел к выводу, что сильные отклонения  $\alpha$ -частиц вызваны электрическим отталкиванием массивным положительным зарядом очень малых размеров, находящимся в центре атома – атомным ядром.

Для оценки размеров атомных ядер необходимо знать, на какое минимальное расстояние  $r_{\min}$  к ядру может приблизиться  $\alpha$ -частица при лобовом столкновении.

По закону сохранения энергии потенциальная энергия  $\alpha$ -частицы в момент остановки должна равняться начальной кинетической энергии:

$$\frac{m_{\alpha} v_{\alpha}^2}{2} = \frac{2eZe}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{мин}}}, \quad (8.1)$$

где  $Z$  – порядковый номер химического элемента фольги в таблице Д.И. Менделеева. Заметим, что это выражение справедливо, когда масса ядра элемента фольги гораздо больше массы  $\alpha$ -частицы – тогда ядро можно считать неподвижным. В этом случае для  $r_{\text{мин}}$  имеем:

$$r_{\text{мин}} = \frac{Ze^2}{\pi\epsilon_0 m_{\alpha} v_{\alpha}^2}. \quad (8.2)$$

Положив характерные значения  $Z = 50$  (ядро олова),  $v_{\alpha} = 10^7$  м/с,  $m_{\alpha} = 7 \cdot 10^{-27}$  кг, получим оценку радиуса ядра:

$$r_{\text{мин}} = 7 \cdot 10^{-14} \text{ м}. \quad (8.3)$$

Таким образом, опыты Резерфорда показали, что в центре атома находится небольшое, массивное положительно заряженное ядро, вокруг которого движутся электроны, подобно движению планет вокруг Солнца. Поэтому модель атома по Резерфорду иногда называют планетарной ядерной моделью атома. Подчеркнем, что эта аналогия основана на сходстве сил гравитационного притяжения и сил электрического притяжения между разноименными зарядами.

Однако в такой модели атом оказывается неустойчивым. Действительно, электроны, двигаясь вокруг ядра, должны излучать электромагнитные волны, терять свою энергию и, в конце концов, упасть на положительно заряженное ядро. Оценки показывают, что это должно произойти за времена порядка  $10^{-11}$  с. На самом деле этого не происходит – атомы в отсутствие внешних воздействий являются устойчивыми.

Кроме того, планетарная модель не способна объяснить закономерностей линейчатых спектров излучения атомов. По законам классической механики и электродинамики в излучении атомов должен быть непрерывный набор частот электромагнитных волн, т.е. спектр излучения атомов должен быть сплошным. Однако в спектре излучения атомов присутствуют лишь отдельные линии, соответствующие определенным частотам электромагнитного излучения.

Заметим, что набор линий разных частот (или длин волн) характерен для всех атомов данного элемента, являясь как бы его “визитной карточкой”.

## 8.2. Закономерности атомных спектров

Для атома водорода существуют достаточно простые закономерности в расположении линий в спектре.

На рис. 8.2 схематически изображен спектр излучения атомарного водорода. Показаны линии как в видимой, так и в инфракрасной и ультрафиолетовой частях спектра. Спектральные линии можно разделить на группы (серии), имеющие сходное расположение линий. В серии густота спектральных линий увеличивается с уменьшением длины волны (ростом частоты). Длины волн линий водородного спектра описываются формулой Бальмера:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (8.4)$$

где  $m, n$  – целые числа, причем  $m = 1, 2, 3, \dots, n = m + 1, m + 2, m + 3, \dots, R$  – постоянная Ридберга, имеющая численное значение  $R = 1,09 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ . Серия линий, отвечающая значению  $m = 1$ , называется серией Лаймана, для нее:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, \dots \quad (8.5)$$

Спектральные линии серии Лаймана находятся в ультрафиолетовой части спектра. Серия с  $m = 2$  называется серией Бальмера, для нее:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, \dots \quad (8.6)$$

Первые четыре линии этой серии находятся в видимой части спектра излучения атома водорода.



Рис. 8.2

### 8.3. Постулаты Бора

Объяснить эти закономерности спектров оказалось возможным только на основе изменения представлений о свойствах микрочастиц, в частности, электронов. Развивая квантовые представления Планка и Эйнштейна, датский физик Н. Бор перенес представления о дискретности энергии на атомы.

Для объяснения закономерностей атомных спектров Н. Бором были выдвинуты три постулата.

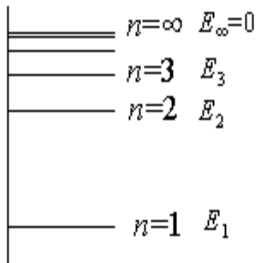


Рис. 8.3

**Первый постулат.** *Существуют стационарные состояния атомов, в которых атом не излучает. В стационарном состоянии атом характеризуется определенной полной энергией. Энергии стационарных состояний образуют дискретный набор значений  $E_1, E_2, E_3, \dots$*  Набор энергетических уровней атома изображен на рис. 8.3.

**Второй постулат.** *Излучение света атомом происходит при переходе из одного стационарного состояния (с большей энергией) в другое (с меньшей энергией) в виде одного кванта электромагнитного излучения.*

Частота излучаемого кванта  $\nu$  определяется разностью энергий  $n$ -го и  $m$ -го состояний:

$$h\nu = E_n - E_m. \quad (8.7)$$

Заметим, что излучение происходит, если  $E_n > E_m$ , в противном случае происходит поглощение кванта электромагнитной волны.

**Третий постулат.** *В стационарном состоянии атома электрон может иметь лишь квантованные значения момента импульса,*

$$L_n = n\hbar, \quad (8.8)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  (для круговых орбит  $L = mvr$ ).

### 8.4. Водородоподобный атом

С помощью постулатов Бора можно объяснить закономерности спектров водородоподобных атомов.

**Водородоподобный атом – атом с одним электроном.** Это – либо атом водорода, либо ион с одним электроном. Заряд ядра водородоподобного атома равен  $Ze$ .

Пусть единственный электрон такого атома движется по круговой орбите, тогда  $m_e \frac{v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ . Отсюда получаем

$$m_e \frac{v^2}{2} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad \text{или} \quad v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}.$$

Согласно третьему постулату Бора  $L_n = m_e v r_n = n\hbar$ . Из этих выражений получаем, что радиус орбит электронов может принимать лишь следующие значения:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2 Z} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.9)$$

Найдем теперь энергию атома. Эта энергия равна сумме кинетической энергии электрона и потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Подставляя в это выражение  $m_e \frac{v^2}{2} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ , получим

$$E = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

На самом деле, как мы видели раньше, радиус  $r$  принимает лишь определенные значения в стационарных состояниях, характеризующихся натуральными числами  $n$ ,  $r = r_n$ . Поэтому и энергия стационарных состояний будет зависеть от  $n$ :

$$E_n = -\frac{m_e}{2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2 \frac{Z^2}{n^2}. \quad (8.10)$$

**Число  $n$ , определяющее энергию стационарного состояния атома, называется главным квантовым числом.** В случае атома водорода ( $Z = 1$ ) энергия

$$E_n = -\frac{m_e}{2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \frac{1}{n^2}. \quad (8.11)$$

Обычно состояние атома с наименьшей энергией называется основным. Другие состояния атома являются возбужденными.

Энергия основного состояния атома водорода:

$$E_1 = -\frac{m_e}{2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 = -13,6 \text{ эВ}, \quad (8.12)$$

причем  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ . Радиус орбиты электрона в основном состоянии атома водорода:

$$r_1 = a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2 Z} = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (8.13)$$

Эта величина называется первым боровским радиусом атома водорода. Исходя из второго постулата Бора, получим частоты спектральных линий излучения атома водорода:

$$h\nu = E_n - E_m = -\frac{m_e}{2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (8.14)$$

Сравнивая эту формулу с формулой Бальмера, получаем выражение для постоянной Ридберга:

$$R = \frac{m_e c}{4\pi\hbar} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \right)^2. \quad (8.15)$$

Если в эту формулу подставить численные значения  $m$ ,  $c$ ,  $\hbar$ ,  $\epsilon_0$ , получим численное значение постоянной Ридберга, хорошо согласующееся со спектроскопическими данными.

Таким образом, постулаты Бора позволили объяснить закономерности спектров водородоподобных атомов. Однако в рамках только представлений Бора оказалось невозможным построить теорию атома с двумя электронами – атома гелия.

Дело в том, что Бор ввел дискретность энергетических состояний атома, но законы движения электронов по орбитам остались старые, классические, что, как оказалось в дальнейшем, несовместимо.

Используя знания о волновых свойствах микрочастиц, можно получить третий постулат Бора. Электрон, находясь на определенной орбите, представляет собой стоячую волну с длиной волны,

определяемой соотношением  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$ . Отношение длины орбиты

электрона к длине волны должно быть целым числом:

$$n = \frac{2\pi r}{\lambda} = \frac{2\pi r p}{2\pi\hbar} = \frac{rp}{\hbar}.$$

Таким образом, получаем соотношение (8.8):

$$n = \frac{rp}{\hbar} \Rightarrow L_n = rp = n\hbar.$$

## Лекция 9. ОСНОВЫ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ И ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

### 9.1. Состав атомного ядра

Как установлено в опытах Резерфорда, атом имеет ядро размером порядка  $10^{-14} \div 10^{-15}$  м и электронную оболочку. Экспериментально доказано, что атомное ядро состоит из протонов и нейтронов.

Атомное ядро положительно заряжено. Измерения электрического заряда атомных ядер были выполнены Г. Мозли в 1913 г. Он облучал различные вещества потоком электронов, при этом регистрировал спектры рентгеновского излучения, чувствительные к величине заряда ядра.

Электрический заряд ядра равен произведению элементарного электрического заряда  $e$  на порядковый номер  $Z$  химического элемента в периодической системе Д. И. Менделеева:

$$q_{\text{я}} = +eZ. \quad (9.1)$$

Атомы с одинаковыми зарядами ядра имеют одинаковое строение электронных оболочек и поэтому химически неразличимы.

***Заряд ядра определяется количеством протонов  $Z$  в нем, величина  $Z$  называется атомным номером (она совпадает с порядковым номером элемента в периодической системе).***

Протон и нейтрон имеют очень близкие массы:  $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}$  кг,  $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$  кг; их взаимодействие с другими частицами во многом одинаково, поэтому их объединяют под общим названием нуклон. Часто говорят, что атомное ядро состоит из нуклонов.

**Полное число нуклонов в ядре обозначается буквой  $A$  и называется массовым числом.**

Поскольку массы протонов и нейтронов близки, массу ядра с очень хорошей точностью ( $\sim 0,1\%$ ) можно представить в виде

$$M \sim \frac{(m_p + m_n)}{2} A.$$

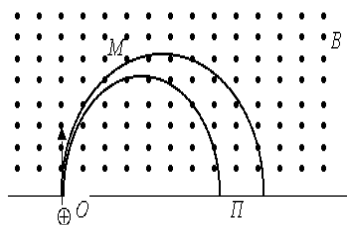


Рис. 9.1

Массы атомных ядер определяют экспериментально с помощью масс-спектрографа, схема которого представлена на рис. 9.1. Положительные ионы исследуемого вещества разгоняются электрическим полем. Специальное устройство пропускает через щель  $O$  только ионы с одинаковой скоростью  $v$ . Пучок попадает в

вакуумную камеру  $M$ , находящуюся между полюсами магнита (вектор  $\vec{B} \perp \vec{v}$ ). На заряженную частицу в магнитном поле действует сила Лоренца, модуль которой  $F = qvB$ . Под действием этой силы заряженная частица движется по окружности, радиус которой определяется из условия  $\frac{mv^2}{R} = qvB$ . Поэтому все ионы одинаковой массы, описав полуокружность, попадают в одно место на фотопластинке  $П$ . Тогда масса иона определяется соотношением:

$$m = \frac{qBR}{v}. \quad (9.2)$$

В качестве единицы массы в атомной и ядерной физике используют атомную единицу массы, равную  $1/12$  массы атома углерода  $^{12}_6\text{C}$ :

$$1 \text{ а.е.м} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}. \quad (9.3)$$

**Разновидности элементов, ядра которых имеют одинаковый заряд, но различные массы, называются изотопами.** Пример – изотопы  $^1_1\text{H}$  – обычный водород или протий,  $^2_1\text{H}$  – дейтерий и  $^3_1\text{H}$  – тритий.

**Атомы с одинаковым числом нейтронов в ядрах называются изотонами, а с одинаковым числом нуклонов – изобарами.**



Многие атомные ядра имеют форму, близкую к сферической. При этом экспериментальные данные по рассеянию электронов на ядрах позволили определить средний радиус ядра:

$$R_A = r_0 A^{1/3}, \quad (9.4)$$

где  $r_0 = 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ м} = 1,3 \text{ Фм}$ . Здесь введена новая единица измерения расстояний в ядерной физике: 1 ферми = 1 Фм =  $10^{-15} \text{ м}$ .

Оценим плотность ядерного вещества:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_A^3} = \frac{1,66 \cdot 10^{-27} A \text{ кг}}{\frac{4}{3}\pi (1,3 \cdot 10^{-15} A^{1/3})^3 \text{ м}^3} = 1,8 \cdot 10^{17} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (9.5)$$

Отметим, что плотность ядерного вещества не зависит от массового числа.

## 9.2. Ядерные силы

Какие силы связывают нуклоны на столь малых расстояниях? Очевидно, что это должны быть силы притяжения, способные уравновесить кулоновские силы отталкивания протонов. Эти силы были названы ядерными.

Свойства этих сил к началу XXI в. изучены достаточно хорошо: на расстояниях  $\sim 10^{-15} \text{ м}$  от центра протона ядерные силы примерно в 35 раз больше кулоновских и в  $10^{38}$  раз больше гравитационных. Однако с увеличением расстояния они очень быстро убывают, и уже на расстояниях  $\sim 1,5 \cdot 10^{-15} \text{ м}$  их действием можно пренебречь.

Важно заметить, что ядерные силы не зависят от наличия или отсутствия у частицы электрического заряда, т.е. протон с протоном, протон с нейтроном и нейтрон с нейтроном одинаково взаимодействуют между собой посредством ядерных сил. Это свойство и позволяет рассматривать протон и нейтрон как одну частицу – нуклон.

## 9.3. Энергия связи атомных ядер

Хорошо известно, что полная энергия системы частиц в связанном состоянии всегда меньше, чем энергия этих же частиц в свободном состоянии. Причина состоит в том, что для разделения связанной системы на свободные частицы необходимо затратить неко-

торую энергию, чтобы преодолеть силы притяжения между связанными частицами. Например, чтобы оторвать электрон от атома водорода (произвести ионизацию атома), нужно затратить энергию  $E = 13,6$  эВ. Это и есть энергия связи электрона в атоме.

**Минимальная энергия, которую необходимо затратить для разделения атомного ядра на составляющие его нуклоны, называется энергией связи ядра.** Эта энергия расходуется на преодоление притяжения между нуклонами, вызываемого действием ядерных сил.

Энергия связи атомного ядра может быть выражена через массы частиц:

$$E_{\text{св}} = (Zm_p + Nm_n - m_{\text{я}})c^2 = \Delta mc^2, \quad (9.6)$$

где  $m_p$ ,  $m_n$  – массы покоя протона и нейтрона;  $m_{\text{я}}$  – масса ядра. Величина  $\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_{\text{я}}$  называется дефектом массы атомного ядра. При объединении протонов и нейтронов в атомное ядро за счет работы сил ядерного притяжения выделяется энергия, равная по модулю энергии связи ядра.

#### 9.4. Радиоактивность

*Некоторые ядра могут самопроизвольно распадаться, превращаясь в ядра других элементов путем испускания одной или нескольких легких частиц. Такие ядра называются нестабильными или радиоактивными.*

Различают три основных вида радиоактивности:

- 1) альфа-распад – атомное ядро испускает  $\alpha$ -частицы (ядро атома гелия  ${}^4_2\text{He}$ ), превращаясь в ядро другого элемента;
- 2) бета-распад – атомное ядро испускает электрон  $e^-$  или позитрон  $e^+$ , превращаясь в ядро другого элемента;
- 3) гамма-излучение – испускание ядром жестких фотонов, т.е. фотонов с большой энергией и малой длиной волны  $\lambda \sim 10^{-10} \div 10^{-14}$  м.

При радиоактивном распаде происходит превращение части энергии покоя атомного ядра в кинетическую энергию осколков.

Пусть происходит распад ядра  $X$  на две частицы  $Y$  и  $Z$ . По закону сохранения энергии:

$$m_X c^2 = m_Y c^2 + m_Z c^2 + T_Y + T_Z, \quad (9.7)$$

где  $T_Y$  и  $T_Z$  – кинетические энергии частиц  $Y$  и  $Z$ . Отсюда получаем энергетическое условие, необходимое для протекания радиоактивного распада:

$$m_X > m_Y + m_Z. \quad (9.8)$$

Аналогичное условие должно выполняться при распаде на более чем две частицы.

## 9.5. Закон радиоактивного распада

Радиоактивный распад – процесс статистический (как и все процессы в микромире), т.е. нельзя предсказать, когда именно распадется конкретное нестабильное ядро. *Основной статистической характеристикой, описывающей радиоактивный распад, является вероятность распада в единицу времени  $\lambda$* . Эта величина называется постоянной распада. Она одинакова для всех ядер данного изотопа.

Найдем, как уменьшается со временем число ядер радиоактивного изотопа. Если взять большое число  $N$  одинаковых радиоактивных ядер, то за первую единицу времени будет распадаться  $\lambda N$  ядер. Число ядер, распадающихся за время  $dt$ , пропорционально  $\lambda N$  и  $dt$ , т.е.:

$$dN = -\lambda N dt. \quad (9.9)$$

Знак минус означает, что число радиоактивных ядер, способных к распаду, уменьшается со временем.

Интегрирование выражения (9.9) дает:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (9.10)$$

где  $N_0$  – число радиоактивных ядер в начальный ( $t = 0$ ) момент времени. Это выражение называют законом радиоактивного распада.

**Период полураспада определяется как время, в течение которого число не распавшихся ядер уменьшается вдвое.** Согласно закону радиоактивного распада

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}, \quad (9.11)$$

откуда

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (9.12)$$

Период полураспада известных радиоактивных ядер изменяется в пределах от  $10^{-7}$  с до  $10^{15}$  лет.

## 9.6. Ядерные реакции

**Ядерной реакцией называют превращение исходного атомного ядра при взаимодействии с какой-либо частицей в другое ядро, отличное от исходного.**

Это превращение записывается в виде  $A(a,b)B$  или  $A + a \rightarrow B + b$ , где  $A$  – исходное ядро,  $a$  – бомбардирующая частица,  $b$  – испускаемая частица,  $B$  – ядро-продукт.

Исторически первая ядерная реакция была обнаружена Э. Резерфордом в 1919 г. и это была реакция превращения ядра азота в ядро кислорода:

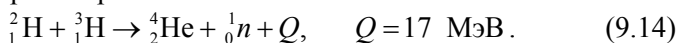


Для описания ядерных реакций очень важное значение имеют законы сохранения энергии, импульса, заряда и т.д. Любой закон сохранения заключается в том, что физическая величина, для которой справедлив закон сохранения, должна быть одинаковой до и после взаимодействия частиц. Например, для реакции  $a + A \rightarrow b + B$  закон сохранения энергии записывается в виде

$$m_a c^2 + T_a + m_A c^2 + T_A = m_b c^2 + T_b + m_B c^2 + T_B,$$

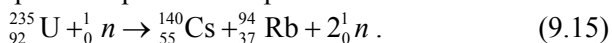
где буквой  $T$  обозначены кинетические энергии частиц.

Величина  $Q = (m_a + m_A - m_B - m_b)c^2$  называется энергией реакции. **Если  $Q > 0$ , то реакция называется экзотермической, т.е. идет с выделением энергии.** Пример такой реакции – синтез легких ядер дейтерия и трития:



**При  $Q < 0$  реакция называется эндотермической.**

Особое значение имеют реакции деления тяжелых изотопов под действием нейтронов. Они составляют основу атомной энергетики. Энергия, выделяемая при таких реакциях, используется для получения электроэнергии. При делении ядра урана  ${}^{235}_{92}\text{U}$  под действием нейтрона образуется два осколка (с отношением масс примерно 2/3) и от одного до трех нейтронов с энергией  $\sim 2$  МэВ:



**Поскольку при делении образуются новые нейтроны, возможно осуществить самоподдерживающуюся цепную реакцию.** Например, при делении всех ядер, содержащихся в 140 г урана, вы-

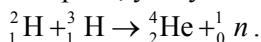
свободается  $10^{13}$  Вт энергии, что эквивалентно сжиганию тысячи тонн нефти.

Заметим, что необходимым условием осуществления цепной реакции является наличие достаточно большого количества урана, так как в образцах малых размеров большинство нейтронов пролетает через образец, не попав ни в одно ядро. **Минимальная масса урана, достаточная для осуществления цепной реакции, называется критической.** Для урана-235 она составляет примерно 50 кг. При плотности  $1,895 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup> радиус шара такой массы равен примерно 8,5 см.

Простейший способ осуществления цепной реакции, реализованной в атомной бомбе, состоит в следующем: изготавливаются два куска металлического урана, каждый массой несколько меньше критической. Цепная реакция в каждом из них в отдельности идти не может. При быстром соединении кусков развивается цепная реакция и выделяется колоссальная энергия.

Управляемая цепная реакция осуществляется в ядерных реакторах. Управление реактором осуществляется с помощью управляющих стержней, вводимых в активную зону реактора. Управляющие стержни производят из соединений бора и кадмия, эффективно поглощающих тепловые нейтроны, регулируя тем самым скорость цепной реакции.

Другой важнейший, с точки зрения получения энергии, пример ядерной реакции – термоядерная, уже упоминавшаяся выше:



Для осуществления этой реакции ядра должны приблизиться друг к другу на расстояния  $\sim 10^{-15}$  м, когда начнет проявляться ядерное взаимодействие. Этому сближению препятствует кулоновское отталкивание, для его преодоления необходимы очень высокие температуры  $\sim 10^9$  К. При синтезе 1 г гелия из дейтерия и трития выделяется энергия  $\sim 4 \cdot 10^{11}$  Дж. Такая энергия выделяется при сжигании 10 т дизельного топлива.

Ясно, что термоядерные реакции могут стать важным источником энергии для человечества, причем их достоинствами являются неисчерпаемые запасы топлива – воды.

## 9.7. Элементарные частицы

В развитии физики элементарных частиц можно, пожалуй, выделить три этапа:

- 1) *от электрона до позитрона;*
- 2) *от позитрона до кварков;*
- 3) *от гипотезы кварков (1964 г.) до наших дней.*

1. Еще греческий философ Демокрит назвал простейшие неделимые частицы вещества атомами. Все тела состоят из атомов, и, как считалось, превращения, наблюдаемые в мире, – это простая перестановка атомов. В конце XIX в. был выделен электрон как составная часть атома. Затем уже в XX в. были открыты протон и нейтрон, входящие в состав атомного ядра. Поначалу именно эти частицы считались элементарными, неделимыми и неизменными.

2. Однако все оказалось гораздо сложнее: как выяснилось, неизменных частиц нет совсем. Например, нейтрон в свободном состоянии “живет” в среднем 15 мин, распадаясь на протон, электрон и безмассовую частицу антинейтрино. У электрона и протона обнаружили “опасные оппоненты” – позитроны и антипротоны, при столкновении с которыми происходит взаимное уничтожение этих частиц и образование новых.

Все “элементарные частицы” превращаются друг в друга, и эти взаимные превращения – главный факт их существования.

3. В 1964 г. М. Гелл-Манном и Дж. Цвейгом была предложена модель, согласно которой все частицы, участвующие в сильных взаимодействиях – адроны, состоят из кварков. Кварки имеют дробный электрический заряд  $+2/3e$  и  $-1/3e$ . При этом протоны и нейтроны состоят из трех кварков, причем взаимодействие между кварками осуществляется глюонами (от английского слова “glue” – клей).

На существование кварков указывают опыты по рассеянию электронов высоких энергий на протонах и электронах. Эти опыты во многом напоминают опыты Резерфорда, которые привели к открытию атомного ядра.

В настоящее время считается, что существует шесть кварков различных сортов (или, как говорят, ароматов). В табл. 9.1 представлены обозначения кварков, их электрические заряды (в единицах  $e$ ) и массы (в гигаэлектронвольтах).

Таблица 9.1

Кварки, антикварки и глюоны участвуют в сильных взаимодействиях, обеспечивающих устойчивость ядер. Кварки наряду с другими частицами – лептонами участвуют и в электрослабых взаимодействиях. К лептонам относятся электроны, мюоны, тау-лептоны и соответствующие им нейтрино. Примером электрослабого взаимодействия является  $\beta$ -распад свободного нейтрона:

Сорт кварка	Электрический заряд	Масса
$u$	$2/3$	0,003
$d$	$-1/3$	0,006
$s$	$-1/3$	0,1
$c$	$2/3$	1,3
$b$	$-1/3$	4,3
$t$	$2/3$	175

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e,$$

где  $p$  – протон,  $e^-$  – электрон и  $\tilde{\nu}_e$  – электронное антинейтрино.

В середине XX в. считалось, что существуют четыре типа фундаментальных взаимодействий: гравитационное, сильное, слабое и электромагнитное. Однако эксперименты в ЦЕРН (Швейцария) показали, что на масштабах энергий  $\sim 100$  ГэВ происходит объединение слабых и электромагнитных взаимодействий в единое электрослабое взаимодействие. Предсказывается, на масштабах энергий  $\sim 10^{15}$  ГэВ может произойти объединение сильных и электрослабых взаимодействий. Очевидно, что такие энергии не достижимы на ускорителях в обозримом будущем. Однако они возможны в космических лучах. Если действительно такое (большое) объединение происходит, то протон оказывается нестабильной частицей, его период полураспада может составить  $\sim 10^{33} \div 10^{34}$  лет. Поиски распада протона активно ведутся в настоящее время.

Сильновзаимодействующие частиц – адроны, как уже отмечалось, можно построить из кварков и антикварков. Легкие адроны (мезоны) строятся из кварка и антикварка различных ароматов. Примеры мезонов –  $\pi$ -мезон,  $K$ -мезон,  $\eta$ -мезон. Адроны с массами, большими или равными массы нуклона, называются барионами, они состоят из трех кварков или антикварков. К барионам относятся протоны, нейтроны,  $\Lambda$ - и  $\Omega$ -гипероны.

Кварки согласно современным представлениям теории лишены внутренней структуры и в этом смысле могут считаться истинно элементарными. Интересно, что кварки “живут” лишь внутри адронов на расстояниях  $\sim 10^{-15}$  м, они “заперты” внутри адронов и

нейтронов. А можно ли их “освободить” и наблюдать в свободном состоянии? С этой целью сейчас проводятся эксперименты по столкновению релятивистских ядер. Физики надеются, что в результате этих экспериментов можно получить новое состояние ядерного вещества – кварк-глюонную плазму.

Процесс познания структуры вещества продолжается.

## **СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Физика: Учебное пособие для 11-х классов школы и классов с углубленным изучением физики / Под ред. А.А. Пинского. М.: Просвещение, 1995.
2. Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике. М.: Высшая школа, 1982.
3. Сборник задач по колебаниям и оптике / Под ред. Н.А. Добродеева и В.В. Грушина. М.: МИФИ, 1992.
4. Горбаченко Г.М., Грушин В.В. Движение частиц под действием квазиупругих сил. М: МИФИ, 1986.
5. Элементарный учебник физики / Под ред. Г.С. Лансберга. М.: Наука, 1984.
6. Шахмаев Н.М., Шахмаев С.Н., Шодиев Д.Ш. Физика-11. М.: Просвещение, 1991.